INDICE

dodici capitoli, centootto pagine

1. Le equazioni e i sistemi di secondo grado ... 1
1.1 L'equazione di secondo grado e la formula risolu... 2
1.2 Il discriminante ... 3
1.3 Somma e prodotto delle radici ... 4
1.4 Le equazioni fratte ... 5
1.5 I problemi di secondo grado ... 6
1.6 I sistemi di secondo grado ... 8

2. Disequazioni di secondo grado, fratte e sis... 9
2.1 Il segno del trinomio di secondo grado ... 10
2.2 Le disequazioni di secondo grado ... 12
2.3 Le disequazioni fratte ... 14
2.4 I sistemi di disequazioni ... 16
2.5 Le disequazioni con un parametro ... 17

3. Equazioni e disequazioni di grado superiore 18
3.1 Le equazioni binomie e biquadratiche ... 19
3.2 Le equazioni risolubili con la scomposizione ... 21
3.3 Le disequazioni di grado superiore ... 22
3.4 Il numero delle soluzioni di un... (liceo scientifico) 24

4. Irrazionali e valore assoluto (liceo scientifico) 25
4.1 Il valore assoluto ... 26
4.2 Le equazioni con valore assoluto ... 28
4.3 Le disequazioni con valore assoluto ... 30
4.4 Le equazioni irrazionali ... 32
4.5 Le disequazioni irrazionali ... 34

5. Le funzioni (liceo scientifico) ... 37
5.1 Funzione, dominio e immagine ... 38
5.2 Funzioni iniettive e funzione inversa ... 40
5.3 La funzione composta ... 41
5.4 Zeri, segno e simmetrie di una funzione ... 42

6. Il piano cartesiano e la retta ... 43
6.1 Distanza e punto medio ... 44
6.2 L'equazione della retta ... 45
6.3 Rette parallele e perpendicolari ... 48
6.4 La distanza di un punto da una retta ... 49
6.5 I fasci di rette (liceo scientifico) ... 50

7. Le trasformazioni geome... (liceo scientifico) 52
7.1 Le trasformazioni del piano e le isometrie ... 53
7.2 La traslazione ... 54
7.3 Le simmetrie ... 56
7.4 La rotazione ... 57
7.5 L'omotetia e la dilatazione ... 58

8. La parabola ... 60
8.1 La parabola come luogo geometrico ... 61
8.2 L'equazione della parabola e i suoi coefficienti ... 62
8.3 La parabola con l'asse orizzontale ... 65
8.4 Retta e parabola ... 66
8.5 Le tangenti alla parabola ... 68
8.6 Determinare la parabola e i problemi ... 70

9. La circonferenza ... 72
9.1 La circonferenza come luogo geometrico ... 73
9.2 L'equazione generale della circonferenza ... 74
9.3 Retta e circonferenza ... 76
9.4 Le tangenti alla circonferenza ... 77
9.5 Determinare la circonferenza ... 79
9.6 Due circonferenze ... 81

10. L'ellisse (liceo scientifico) ... 82
10.1 L'ellisse come luogo geometrico ... 83
10.2 L'equazione canonica ... 84
10.3 I fuochi e l'eccentricità ... 85
10.4 Retta ed ellisse ... 86
10.5 Determinare l'ellisse ... 88
10.6 L'ellisse traslata ... 90

11. L'iperbole (liceo scientifico) ... 91
11.1 L'iperbole come luogo geometrico ... 92
11.2 L'equazione canonica e gli asintoti ... 93
11.3 Retta e iperbole ... 95
11.4 Determinare l'iperbole ... 96
11.5 L'iperbole equilatera ... 97
11.6 La funzione omografica ... 99

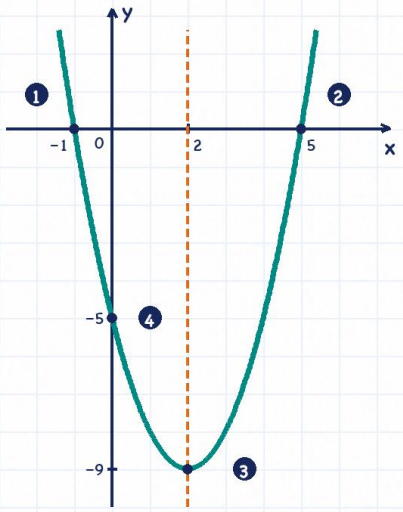
12. Fasci e luoghi geomet... (liceo scientifico) 101
12.1 I fasci di parabole ... 102
12.2 I fasci di circonferenze e l'asse radicale ... 104
12.3 Il segmento parabolico ... 106
12.4 I luoghi geometrici ... 107

CAPITOLO 1

LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO - GLI ZERI DELLA PARABOLA

Matematica - terza

"le soluzioni di un'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, sono le ascisse dei punti in cui la parabola $y = ax^2 + bx + c$ incontra l'asse x".



$y = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$ taglia l'asse x in $(-1; 0)$ e $(5; 0)$, e ha il vertice $(2; -9)$ sulla retta tratteggiata $x = 2$

1 in $(-1; 0)$ la parabola taglia l'asse x: per $x = -1$ il trinomio vale $1 + 4 - 5 = 0$, quindi -1 è una soluzione di $x^2 - 4x - 5 = 0$.

2 anche in $(5; 0)$ la parabola taglia l'asse x, perché $25 - 20 - 5 = 0$, quindi 5 è l'altra soluzione, e il discriminante $\Delta = 16 + 20 = 36$ è positivo.

3 il vertice $V(2; -9)$ è il punto più basso della parabola, e la sua ascissa 2 sta a metà fra le soluzioni -1 e 5, perché $\frac{(-1 + 5)}{2} = 2$.

4 in $(0; -5)$ la parabola taglia l'asse y, perché per $x = 0$ il trinomio vale il termine noto, -5.

IN QUESTO CAPITOLO

1.1 l'equazione di secondo grado e la formula risolutiva
1.2 il discriminante
1.3 somma e prodotto delle radici
1.4 le equazioni fratte
1.5 i problemi di secondo grado
1.6 i sistemi di secondo grado

all'esame: nella seconda prova dello scientifico il quadro chiede equazioni e disequazioni (e loro sistemi) fino al secondo grado, anche per via grafica, e il legame fra radici, fattori lineari e coefficienti.

L'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO - LA FORMULA RISOLUTIVA

Matematica - terza - le equazioni e i sistemi di secondo grado

"un'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, ha al più due soluzioni reali, che la formula risolutiva trova tutte quando $\Delta = b^2 - 4ac$ non è negativo"

1. COSA SI CERCA

i numeri reali x che rendono vera $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c numeri reali, sono le soluzioni dell'equazione, dette anche radici.

con $a = 0$ l'equazione non sarebbe di secondo grado, e per questo si chiede $a \neq 0$.

OCCHIO!

$x^2 = 9$ ha due soluzioni, $x = 3$ e $x = -3$, non la sola 3; $x^2 = -9$ non ne ha, perché un quadrato non è mai negativo.

in $x^2 = 5x$ non si divide per x, perché si perde $x = 0$; si porta tutto a primo membro e si raccoglie, $x(x - 5) = 0$, con soluzioni 0 e 5.

2. LA FORMA NORMALE

$ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c reali e $a \neq 0$

a e b sono i coefficienti di x^2 e di x e c è il termine noto; ogni equazione di secondo grado si porta in questa forma, con 0 a secondo membro.

3. L'EQUAZIONE PURA

con $b = 0$ e $a \neq 0$, $ax^2 + c = 0$ diventa $x^2 = k$, con $k = -\frac{c}{a}$

se $k > 0$ ci sono due soluzioni opposte, $x = \pm\sqrt{k}$; se $k = 0$ c'è la sola $x = 0$; se $k < 0$ non ci sono soluzioni reali, perché un quadrato non è mai negativo.

$x^2 = 9$ dà $x = 3$ oppure $x = -3$, cioè $x = \pm 3$.

4. L'EQUAZIONE SPURIA

con $a \neq 0$ e $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ diventa $x(ax + b) = 0$

un prodotto è nullo se e solo se lo è almeno un fattore, quindi $x = 0$ oppure $ax + b = 0$, cioè $x = -\frac{b}{a}$.

non si divide per x, perché si perderebbe la soluzione $x = 0$.

5. LA FORMULA RISOLUTIVA

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, con $a \neq 0$ e $\Delta \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

la formula serve soprattutto all'equazione completa, cioè con $b \neq 0$ e $c \neq 0$, ma vale per ogni equazione di secondo grado.

il segno $\pm$ dà le due soluzioni, che coincidono se $\Delta = 0$; con $\Delta < 0$ la radice non è reale e non ci sono soluzioni reali.

6. ESEMPIO SVOLTO

$2x^2 - 3x - 2 = 0$ è completa, con $a = 2$, $b = -3$ e $c = -2$, e si calcola prima il discriminante.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$, quindi ci sono due soluzioni reali distinte.

$x = \frac{3 \pm 5}{4}$, cioè $x = 2$ oppure $x = -\frac{1}{2}$.

controllo con $x = 2$, $2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$, e anche $x = -\frac{1}{2}$ dà 0.

TRUCCO

scrivi a, b e c con il loro segno prima di calcolare Δ, perché in $2x^2 - 3x - 2 = 0$ è $b = -3$ e $(-3)^2$ vale 9.

7. DA RICORDARE

1. $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c reali e $a \neq 0$, è l'equazione di secondo grado in forma normale; con $a = 0$ non sarebbe di secondo grado.
2. con $a \neq 0$ e $b = 0$ l'equazione diventa $x^2 = k$, con $k = -\frac{c}{a}$, e ha due soluzioni opposte se $k > 0$, la sola $x = 0$ se $k = 0$ e nessuna soluzione reale se $k < 0$.
3. con $a \neq 0$ e $c = 0$ si ha $x(ax + b) = 0$, con soluzioni $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$; non si divide per x, perché si perderebbe $x = 0$.
4. con $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ le soluzioni sono $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; con $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni reali.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) calcolare $(-3)^2$ come -9: il quadrato di un numero negativo è positivo, quindi $\Delta = 9 + 16 = 25$ e non $-9 + 16 = 7$.
2) dividere per $2a$ solo $\sqrt{\Delta}$ e non tutto il numeratore $-b \pm \sqrt{\Delta}$, mentre con $a = 2$, $b = -3$ e $\Delta = 25$ il numeratore 3 ± 5 vale 8 o -2 e si divide per 4, dando 2 e $-\frac{1}{2}$.

IL DISCRIMINANTE - QUANTE SOLUZIONI HA L'EQUAZIONE

Matematica - terza - le equazioni e i sistemi di secondo grado

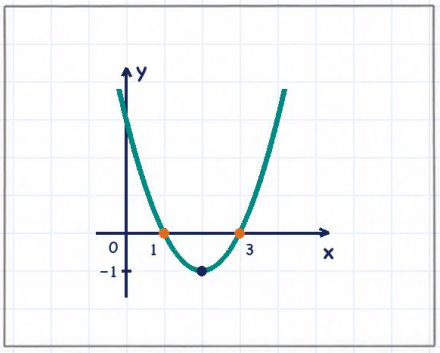
"il segno di $\Delta = b^2 - 4ac$ decide quante soluzioni reali ha $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, e dice se la parabola $y = ax^2 + bx + c$ taglia l'asse x, lo tocca o non lo incontra"

1 IL DISCRIMINANTE

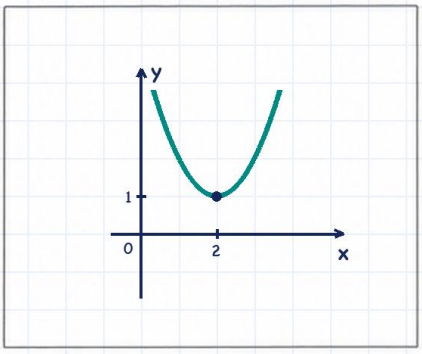
$\Delta = b^2 - 4ac$, con a, b, c coefficienti reali di $ax^2 + bx + c = 0$ e $a \neq 0$, è il numero sotto la radice nella formula risolutiva.

2 TRE CASI

con $a \neq 0$, $\Delta > 0$ dà due soluzioni reali distinte, $\Delta = 0$ due coincidenti, cioè una sola, $x = \frac{-b}{2a}$, e $\Delta < 0$ nessuna soluzione reale.



$y = x^2 - 4x + 3$, cioè $k = 3$ e $\Delta = 4 > 0$, taglia l'asse x in (1; 0) e (3; 0), e le soluzioni sono 1 e 3



$y = x^2 - 4x + 5$, cioè $k = 5$ e $\Delta = -4 < 0$, sta sopra l'asse x, con vertice (2; 1), e l'equazione non ha soluzioni reali

3 LA PARABOLA

le soluzioni sono le ascisse dei punti in cui la parabola $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, incontra l'asse x.
con $\Delta > 0$ lo taglia in due punti,
con $\Delta = 0$ lo tocca in un punto,
con $\Delta < 0$ non lo incontra.

4 UN PARAMETRO

$x^2 - 4x + k = 0$ ha $\Delta = 16 - 4k$, quindi due soluzioni reali distinte se $k < 4$, una sola ($x = 2$) se $k = 4$, nessuna se $k > 4$.

$k = 3$ dà $\Delta = 4$ e le soluzioni 1 e 3;
$k = 5$ dà $\Delta = -4$ e nessuna soluzione reale.

5 DA RICORDARE

① con $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali distinte se $\Delta > 0$, due coincidenti se $\Delta = 0$, nessuna reale se $\Delta < 0$.

② con $a \neq 0$ e $\Delta = 0$ l'unica soluzione è $x = \frac{-b}{2a}$, e la parabola $y = ax^2 + bx + c$ tocca l'asse x nel suo vertice.

③ la parabola $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, taglia l'asse x in due punti se $\Delta > 0$, lo tocca in uno se $\Delta = 0$ e non lo incontra se $\Delta < 0$.

④ $x^2 - 4x + k = 0$ ha $\Delta = 16 - 4k$, quindi due soluzioni reali distinte se $k < 4$, una se $k = 4$, nessuna se $k > 4$; $k = 3$ dà 1 e 3, $k = 5$ nessuna.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) dire che con $\Delta = 0$ non ci sono soluzioni, mentre $x^2 - 4x + 4 = 0$ ha $\Delta = 0$ e la soluzione $x = 2$, perché equivale a $(x - 2)^2 = 0$.

2) confondere Δ negativo con soluzioni negative: $x^2 + 4x + 3 = 0$ ha $\Delta = 4 > 0$ e soluzioni -1 e -3, mentre $x^2 - 4x + 5 = 0$ ha $\Delta = -4$ e nessuna soluzione reale.

SOMMA E PRODOTTO DELLE RADICI - SENZA RISOLVERE L'EQUAZIONE

Matematica - terza - le equazioni e i sistemi di secondo grado

"se $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, ha le radici x_1 e x_2, la loro somma è $-\frac{b}{a}$, il loro prodotto è $\frac{c}{a}$ e il trinomio si scompone in $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$".

① A CHE COSA SERVE

con $\Delta \geq 0$, somma e prodotto delle radici si leggono dai coefficienti, senza risolvere l'equazione.
servono a controllare le soluzioni, a scomporre il trinomio e a costruire un'equazione che abbia radici date.

② SOMMA E PRODOTTO

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ con } a \neq 0 \text{ e } \Delta \geq 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \text{ con } a \neq 0 \text{ e } \Delta \geq 0$$

valgono per le radici reali di $ax^2 + bx + c = 0$, che esistono se $\Delta \geq 0$; con $\Delta = 0$ è $x_1 = x_2$ e la radice si conta due volte.

OCCHIO!

la somma è $-\frac{b}{a}$, con il segno meno: in $3x^2 - 5x - 2 = 0$ è $b = -5$, quindi la somma vale $\frac{5}{3}$ e non $-\frac{5}{3}$.
Somma e prodotto valgono solo con $\Delta \geq 0$, e $x^2 + x + 1 = 0$ ha $-\frac{b}{a} = -1$ e $\frac{c}{a} = 1$ ma non ha radici reali, perché $\Delta = -3$.

③ LA SCOMPOSIZIONE

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2), \text{ con } a \neq 0 \text{ e } \Delta \geq 0$$

il trinomio è il prodotto di a e di due fattori di primo grado, uno per radice; con $\Delta = 0$ i due fattori sono uguali.

con $\Delta < 0$ il trinomio non si scompone in fattori reali di primo grado.

④ DALLE RADICI ALL'EQUAZIONE

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

per due numeri reali x_1 e x_2 qualunque questa equazione ha per soluzioni x_1 e x_2; le radici 2 e -5 danno $x^2 + 3x - 10 = 0$.

⑤ IL SEGNO DELLE RADICI

con $\Delta \geq 0$, se $\frac{c}{a} > 0$ le radici hanno lo stesso segno, e il segno di $-\frac{b}{a}$ dice se sono positive o negative.
se $\frac{c}{a} < 0$ le radici esistono sempre e hanno segni opposti; se $c = 0$ una radice è 0.

TRUCCO

con $a = 1$ e $\Delta \geq 0$ cerca due numeri con somma $-b$ e prodotto c; per $x^2 + 3x - 10 = 0$ servono somma -3 e prodotto -10, cioè 2 e -5.

⑥ ESEMPIO SVOLTO

$3x^2 - 5x - 2 = 0$, con $a = 3$, $b = -5$ e $c = -2$, ha $\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$ e radici $x = \frac{5 \pm 7}{6}$, cioè $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{1}{3}$.
la somma delle radici, $2 + (-\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$, è proprio $-\frac{b}{a}$.
il prodotto delle radici, $2 \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$, è proprio $\frac{c}{a}$.
$3x^2 - 5x - 2 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + \frac{1}{3}) = (x - 2)(3x + 1)$.

⑦ DA RICORDARE

① con $a \neq 0$ e $\Delta \geq 0$, le radici x_1 e x_2 di $ax^2 + bx + c = 0$ hanno somma $-\frac{b}{a}$ e prodotto $\frac{c}{a}$; con $\Delta = 0$ è $x_1 = x_2$.
② con $a \neq 0$ e $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$; con $\Delta < 0$ non c'è una scomposizione in fattori reali di primo grado.
③ per ogni coppia di numeri reali x_1 e x_2, $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ ha per radici x_1 e x_2; con 2 e -5 si ottiene $x^2 + 3x - 10 = 0$.
④ con $\Delta \geq 0$, $\frac{c}{a} > 0$ vuol dire radici concordi, cioè con lo stesso segno, e $\frac{c}{a} < 0$ radici discordi; con $\frac{c}{a} = 0$ una radice è 0.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) dimenticare il fattore a nella scomposizione: $(x - 2)(x + \frac{1}{3})$ vale solo un terzo di $3x^2 - 5x - 2$, che è $3 \cdot (x - 2)(x + \frac{1}{3})$, cioè $(x - 2)(3x + 1)$.
2) credere che radici concordi vogliano dire positive: $x^2 + 5x + 6 = 0$ ha prodotto $6 > 0$ e radici -2 e -3, tutte e due negative.

LE EQUAZIONI FRATTE - PRIMA LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

Matematica - terza - le equazioni e i sistemi di secondo grado

"in un'equazione fratta si scrivono prima le condizioni di esistenza, poi si risolve l'equazione senza denominatori e si scartano le soluzioni che le violano".

1 UN'INCOGNITA AL DENOMINATORE

in un'equazione fratta l'incognita compare in un denominatore, e i valori che lo annullano non si possono sostituire: non sono mai soluzioni.

per questo si escludono prima di risolvere, e alla fine si controlla che le soluzioni trovate non siano fra i valori esclusi.

2 LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

ogni denominatore $\neq 0$

si scompongono i denominatori e si pone ogni fattore con la x diverso da 0, prima di fare qualunque altro passaggio.

nell'esempio svolto i denominatori $x-3$, $x+3$ e $x^2-9=(x-3)(x+3)$ danno $x\neq 3$ e $x\neq -3$.

3 IL DENOMINATORE COMUNE

si portano le frazioni allo stesso denominatore, il minimo comune multiplo dei denominatori scomposti, e si moltiplicano i due membri per questo denominatore.

per le x ammesse il denominatore comune non è 0, quindi le soluzioni ammesse non cambiano.

4 L'EQUAZIONE CHE NE ESCE

$x^2+2x-15=0$, con $x\neq 3$ e $x\neq -3$

senza frazioni si svolgono i prodotti e si portano i termini a primo membro: nell'esempio resta un'equazione di secondo grado, da risolvere con la formula.

5 SI SCARTANO LE SOLUZIONI

una soluzione che viola una condizione di esistenza si scarta, anche se risolve l'equazione che ne esce.

se tutte le soluzioni vengono scartate, l'equazione fratta non ha soluzioni.

6 ESEMPIO SVOLTO

si risolve $\frac{x}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

i denominatori $x-3$, $x+3$ e $x^2-9=(x-3)(x+3)$ sono diversi da 0 se $x\neq 3$ e $x\neq -3$, e queste sono le condizioni di esistenza.

moltiplicando per x^2-9 si ha $x(x+3)-(x-3)=18$, cioè $x^2+2x-15=0$, con $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=$ $=4+60=64$ e $x=\frac{-2\pm 8}{2}$, cioè $x=3$ oppure $x=-5$.

$x=3$ viola la condizione $x\neq 3$ e si scarta; $x=-5$ le rispetta, quindi l'unica soluzione è $x=-5$.

OCCHIO!

le condizioni si scrivono sui denominatori di partenza, prima di semplificare o di moltiplicare, perché dopo x^2-9 non compare più.

$x=3$ risolve $x^2+2x-15=0$ ma non l'equazione fratta, perché lì $x-3$ e x^2-9 valgono 0 e le frazioni non esistono.

TRUCCO

scomponi i denominatori, poni ogni fattore con la x diverso da 0 e usa come denominatore comune ogni fattore una volta, con l'esponente maggiore.

7 DA RICORDARE

1. in un'equazione fratta si scrivono prima le condizioni di esistenza, cioè ogni denominatore $\neq 0$, sui denominatori di partenza.
2. per le x ammesse il denominatore comune non è 0, e moltiplicando per lui si ottiene un'equazione senza frazioni; nell'esempio $x^2+2x-15=0$.
3. si scartano le soluzioni che violano le condizioni, e nell'esempio $x=3$ annulla $x-3$ e non è soluzione, mentre $x=-5$ lo è.
4. se tutte le soluzioni dell'equazione ottenuta violano le condizioni di esistenza, l'equazione fratta non ha soluzioni.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) cambiare un segno, perché il termine $-\frac{1}{x+3}$ moltiplicato per x^2-9 dà $-(x-3)=-x+3$ e non $-x-3$.
2) semplificare e dimenticare la condizione, perché $\frac{x^2-9}{x-3}=6$ diventa $x+3=6$, ma $x=3$ è escluso, quindi non ci sono soluzioni.