INDICE

tredici capitoli, centootto pagine

1. Scomposizioni e frazioni algebriche 1
1.1 Polinomi e prodotti notevoli: il ripasso 2
1.2 La scomposizione in fattori 3
1.3 Le frazioni algebriche 5
1.4 Le equazioni fratte 7
1.5 Le equazioni letterali (liceo scientifico) 8

2. Le disequazioni di primo grado 9
2.1 Le disequazioni intere 10
2.2 I sistemi di disequazioni 12
2.3 Il segno di un prodotto e le disequazioni fratte 13

3. I sistemi lineari 15
3.1 Il sistema lineare e le sue soluzioni 16
3.2 Sostituzione, confronto e riduzione 17
3.3 Il metodo di Cramer 19
3.4 I problemi con due incognite 21
3.5 Tre incognite e matrici (liceo scientifico) 22

4. I numeri reali e i radicali 25
4.1 I numeri irrazionali e i numeri reali 26
4.2 I radicali: condizioni di esistenza e semplificazione 27
4.3 Le operazioni con i radicali 29
4.4 Portare fuori e dentro il segno di radice 31
4.5 La razionalizzazione 33
4.6 Potenze a esponente razionale (liceo scientifico) ... 34
4.7 Coefficienti irrazionali (liceo scientifico) 35

5. Il piano cartesiano e la retta 36
5.1 Il piano cartesiano: distanza e punto medio 37
5.2 Le funzioni e la proporzionalità 38
5.3 La funzione lineare e l'equazione della retta 39
5.4 Il coefficiente angolare e la retta per due punti 41
5.5 Parallele, perpendicolari e intersezione 44
5.6 La distanza punto-retta (liceo scientifico) 46
5.7 I fasci di rette (liceo scientifico) 47

6. Secondo grado: equazioni (liceo scientifico) .. 48
6.1 Le equazioni incomplete 49
6.2 La formula risolutiva 50
6.3 Il discriminante e la formula ridotta 52
6.4 Somma e prodotto delle radici, il trinomio 53
6.5 Equazioni fratte, letterali e parametriche 55
6.6 I problemi di secondo grado 57

7. Parabola e disequazioni (liceo scientifico) 59
7.1 La parabola $y = ax^2 + bx + c$ 60
7.2 Parabola ed equazione: gli zeri sul grafico 62
7.3 Il segno del trinomio di secondo grado 63
7.4 Le disequazioni di secondo grado 64
7.5 Disequazioni fratte e sistemi 66

8. Grado superiore e sistemi (liceo scientifico) ... 68
8.1 Le equazioni di grado superiore 69
8.2 Le disequazioni di grado superiore 71
8.3 I sistemi di secondo grado 73
8.4 Il valore assoluto 74

9. Triangoli, parallele e quadrilateri: la ripresa ... 75
9.1 Rette perpendicolari e parallele 76
9.2 I triangoli: congruenza e triangolo isoscele 77
9.3 I quadrilateri 78

10. La circonferenza (liceo scientifico) 80
10.1 I luoghi geometrici: asse e bisettrice 81
10.2 La circonferenza: corde e archi 82
10.3 Retta e circonferenza, le tangenti 83
10.4 Angoli al centro e alla circonferenza 84
10.5 I punti notevoli del triangolo 86
10.6 Poligoni inscritti, circoscritti e regolari 87

11. L'equivalenza, Pitagora ed Euclide 89
11.1 L'equivalenza e le aree dei poligoni 90
11.2 Il teorema di Pitagora 92
11.3 I triangoli 30°-60°-90° e 45°-45°-90° 94
11.4 I teoremi di Euclide (liceo scientifico) 95

12. Talete e la similitudine (liceo scientifico) 97
12.1 Il teorema di Talete 98
12.2 I triangoli simili e i criteri di similitudine 99
12.3 Perimetri e aree; corde, secanti e tangenti 101

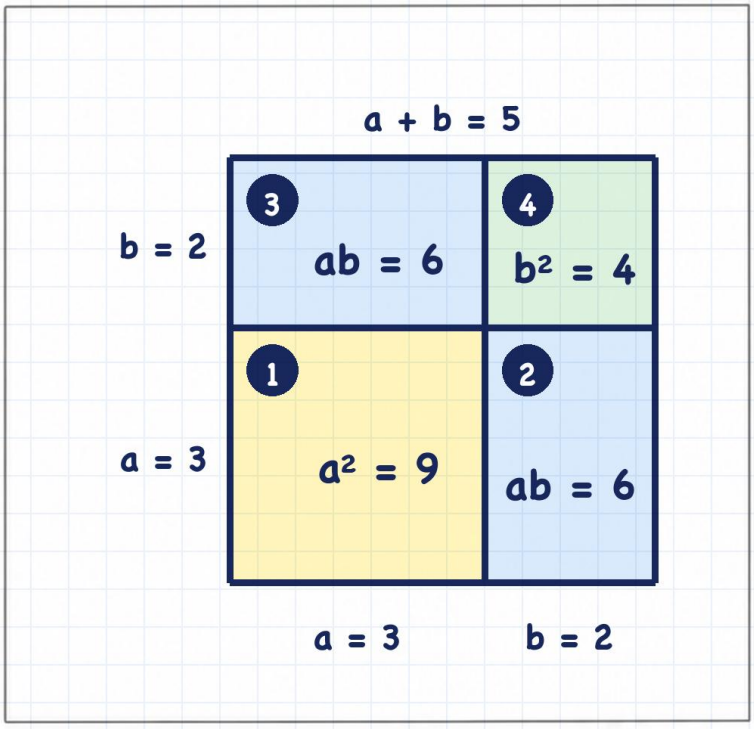
13. La probabilità 103
13.1 Eventi e probabilità 104
13.2 L'evento contrario e la somma logica 105
13.3 Il prodotto logico e la probabilità condizionata .. 106
13.4 La probabilità statistica e il gioco equo 108

CAPITOLO 1

SCOMPOSIZIONI E FRAZIONI ALGEBRICHE - UN QUADRATO, QUATTRO PEZZI

Matematica - seconda

"per a e b positivi il quadrato di lato a + b si divide in a^2, b^2 e due rettangoli ab, quindi $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; con a = 3 e b = 2 si ha 25 = 9 + 6 + 6 + 4".



il quadrato di lato a + b = 5 ha area $(a+b)^2 = 25$ e si divide in $a^2 = 9$ (giallo), due rettangoli ab = 6 (azzurri) e $b^2 = 4$ (verde)

1. in basso a sinistra il quadrato di lato a = 3 ha area $a^2 = 9$.
2. a destra il rettangolo con lati b = 2 e a = 3 ha area ab = 6.
3. in alto il rettangolo con lati a = 3 e b = 2 è congruente a quello di destra e ha area ab = 6.
4. in alto a destra il quadrato di lato b = 2 ha area $b^2 = 4$, e le quattro aree danno $9 + 6 + 6 + 4 = 25 = (a+b)^2$.

IN QUESTO CAPITOLO

1.1 polinomi e prodotti notevoli: il ripasso
1.2 la scomposizione in fattori
1.3 le frazioni algebriche
1.4 le equazioni fratte
1.5 le equazioni letterali (liceo scientifico)

all'esame: nella seconda prova dello scientifico il quadro chiede di mettere in relazione le radici di un polinomio, i suoi fattori lineari e i suoi coefficienti, e nomina le funzioni razionali fratte.

POLINOMI E PRODOTTI NOTEVOLI
SOMMARE, MOLTIPLICARE, SVILUPPARE

Matematica - seconda - scomposizioni e frazioni algebriche

"solo i monomi simili si sommano in un unico monomio, un polinomio si moltiplica termine per termine, e i prodotti notevoli danno il risultato senza rifare il calcolo"

① MONOMI E POLINOMI

un monomio è un prodotto di numeri e lettere con esponenti naturali, come $-3x^2y$; un polinomio è una somma di monomi, e monomi con la stessa parte letterale sono simili.

si riducono solo i monomi simili, sommando i coefficienti: $5x^2 + 3x^2 = 8x^2$, mentre $5x^2 + 3x$ resta com'è.

OCCHIO!

si eleva al quadrato tutto il termine: $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, e non $2x^2 - 4x + 1$.

in $(a-b)^2$ l'ultimo termine è $+b^2$, col segno più: $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, e non $x^2 - 6x - 9$.

② IL PRODOTTO TERMINE PER TERMINE

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

a, b, c e d sono numeri o espressioni qualunque: ogni termine della prima parentesi si moltiplica per ogni termine della seconda, poi si riducono i monomi simili.

$(x+3)(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$.

③ IL QUADRATO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

in $(a+b)^2$ il doppio prodotto è $+2ab$ e in $(a-b)^2$ è $-2ab$, mentre a^2 e b^2 hanno sempre il segno più: $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

④ LA SOMMA PER LA DIFFERENZA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

i termini misti $+ab$ e $-ab$ si annullano: $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$.

⑤ IL CUBO DI UN BINOMIO

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

con $a = 3$ e $b = 2$, $(a+b)^3 = 125 = 27 + 54 + 36 + 8$, mentre $a^3 + b^3$ vale solo 35.

⑥ ESEMPIO SVOLTO

si calcola $(2x-1)^2 - (x+2)(x-2)$ con i due prodotti notevoli.

$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ e $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$.

il meno davanti a (x^2-4) cambia il segno di tutti i suoi termini: $4x^2 - 4x + 1 - (x^2 - 4) = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4$.

si riducono i monomi simili e resta $3x^2 - 4x + 5$; con $x = 1$ l'espressione di partenza vale $1 + 3 = 4$, e anche $3 - 4 + 5 = 4$.

TRUCCO

per $(a+b)^2$ disegna il quadrato di lato $a+b$, con a e b positivi: dentro ci sono a^2, b^2 e due rettangoli ab.

⑦ DA RICORDARE

1. due monomi sono simili se hanno la stessa parte letterale, e si riducono solo i simili sommando i coefficienti: $5x^2 + 3x^2 = 8x^2$, mentre $5x^2 + 3x$ resta com'è.
2. un polinomio si moltiplica termine per termine; il meno davanti a una parentesi cambia il segno di tutti i suoi termini, e $-(x^2 - 4) = -x^2 + 4$.
3. per ogni a e b, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ e $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(a+b)^2$ e $a^2 + b^2$ differiscono di $2ab$.
4. per ogni a e b, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ e $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; con $a = 3$ e $b = 2$, $(a+b)^3 = 125$.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) scrivere $(a+b)^2 = a^2 + b^2$: con $a = 3$ e $b = 2$ il primo vale 25 e il secondo 13, perché manca il doppio prodotto $2ab = 12$.
2) cambiare il segno solo al primo termine della parentesi: $-(x^2 - 4) = -x^2 + 4$, e non $-x^2 - 4$.

LA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI - QUATTRO STRUMENTI E UNA PROVA

Matematica - seconda - scomposizioni e frazioni algebriche

"scomporre un polinomio è scriverlo come prodotto di fattori più semplici, e il risultato si controlla sempre rimoltiplicando i fattori".

1 SCOMPORRE

scomporre un polinomio è scriverlo come prodotto di fattori più semplici: $12x^3 - 18x^2 = 6x^2 \cdot (2x - 3)$.

conviene provare prima il raccoglimento totale e poi gli altri strumenti, e alla fine rimoltiplicare per controllare.

2 RACCOGLIMENTO TOTALE

$ab + ac = a \cdot (b + c)$

a, b e c sono numeri o espressioni qualunque: si raccoglie il fattore comune a tutti i termini, cioè il MCD dei coefficienti per le lettere comuni, ciascuna con l'esponente più basso. $12x^3 - 18x^2 = 6x^2 \cdot (2x - 3)$, e nella parentesi resta il quoziente di ogni termine per $6x^2$.

OCCHIO!

se un termine coincide col fattore raccolto, nella parentesi resta 1, e $x^2 + x = x(x + 1)$ e non $x(x)$.

dopo il raccoglimento guarda il polinomio che resta in parentesi: può essere ancora un prodotto notevole, come $x^2 - 4$ in $3x(x^2 - 4)$.

3 RACCOGLIMENTO PARZIALE

$ax + ay + 3x + 3y = (x + y)(a + 3)$

si raggruppano i termini, qui a due a due, e si raccoglie in ogni gruppo, $a(x + y) + 3(x + y)$; se la parentesi è la stessa, si raccoglie anche lei.

4 PRODOTTI NOTEVOLI AL CONTRARIO

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$25x^2 - 49 = (5x)^2 - 7^2 = (5x + 7)(5x - 7)$; $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$, perché $16 = 4^2$ e $8x = 2 \cdot x \cdot 4$.

5 TRINOMIO SPECIALE

$x^2 + sx + p = (x + m)(x + n)$ se esistono due numeri m e n con $m + n = s$ e $m \cdot n = p$

s è il coefficiente di x e p il termine noto: $x^2 + 5x + 6$ ha $m = 2$ e $n = 3$, quindi $(x + 2)(x + 3)$; $x^2 - 7x + 12$ ha $m = -3$ e $n = -4$.

TRUCCO

per $x^2 + sx + p$ cerca, se esistono, due numeri di prodotto p e controlla la somma: per $x^2 + 5x + 6$ le coppie positive 1 e 6 danno somma 7, la coppia 2 e 3 dà 5.

6 ESEMPIO SVOLTO

si scompone $3x^3 - 12x$, che ha il fattore comune $3x$ da raccogliere.

$3x^3 - 12x = 3x \cdot (x^2 - 4)$.

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$ è una differenza di quadrati, quindi $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ e $3x^3 - 12x = 3x(x + 2)(x - 2)$.

controllo: $3x(x + 2)(x - 2) = 3x(x^2 - 4) = 3x^3 - 12x$, e con $x = 1$ i due membri valgono -9.

7 DA RICORDARE

1. scomporre un polinomio è scriverlo come prodotto di fattori più semplici; il risultato si controlla rimoltiplicando i fattori.
2. raccoglimento totale: $ab + ac = a \cdot (b + c)$, col MCD dei coefficienti e le lettere comuni all'esponente più basso; parziale, se la parentesi è la stessa: $ax + ay + 3x + 3y = (x + y)(a + 3)$.
3. per ogni a e b, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ e $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$; per esempio $25x^2 - 49 = (5x + 7)(5x - 7)$ e $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$.
4. $x^2 + sx + p = (x + m)(x + n)$ se esistono due numeri m e n con $m + n = s$ e $m \cdot n = p$; $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ e $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) scrivere $x^2 - 9 = (x - 3)^2$: il quadrato $(x - 3)^2$ dà $x^2 - 6x + 9$, mentre $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.
2) scegliere i segni sbagliati nel trinomio: $(x - 2)(x - 3)$ dà $x^2 - 5x + 6$, e non $x^2 + 5x + 6$, perché la somma dei numeri deve essere $+5$.

LA SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO – SEI PASSI E UN GRAFICO

Matematica – seconda – scomposizioni e frazioni algebriche

"se $P(a) = 0$, $P(x)$ si divide per $x - a$ con la regola di Ruffini; con coefficienti interi e primo coefficiente 1, gli zeri interi si cercano fra i divisori del termine noto (se è 0, si raccoglie x)".

L'ESEMPIO: $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

① RACCOGLIMENTO

cerca un fattore comune e prova il raccoglimento parziale

nessun fattore comune, e a due a due non esce una parentesi uguale: $x^2(x-4) + (x+6)$

② PRODOTTI NOTEVOLI

guarda se è un quadrato di binomio, una differenza di quadrati o un cubo

ha quattro termini, ma un cubo $(x-k)^3$ vuole $-3k = -4$ e $3k^2 = 1$, incompatibili

③ UNO ZERO

con coefficienti interi, primo coefficiente 1 e termine noto 6, prova i suoi divisori, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$P(1) = 4$ non va; $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$, quindi si divide per $x + 1$

④ RUFFINI

con $a = -1$ dividi $P(x)$ per $x - a = x + 1$, sui coefficienti 1, −4, 1, 6

$1, -4 + 1 \cdot (-1) = -5, 1 + (-5) \cdot (-1) = 6, 6 + 6 \cdot (-1) = 0$, quindi quoziente $x^2 - 5x + 6$ e resto 0

⑤ IL QUOZIENTE

scomponi il quoziente cercando due numeri di somma −5 e prodotto 6

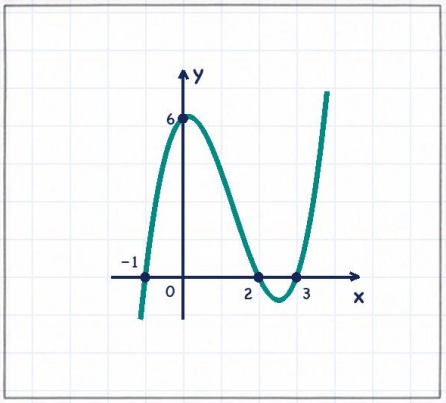
-2 e -3, quindi $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ e $P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$

⑥ CONTROLLO

rimoltiplica i fattori e verifica di ottenere $P(x)$

$(x+1)(x-2)(x-3) = (x+1)(x^2-5x+6)$ $= x^3 - 4x^2 + x + 6 = P(x)$

⑦ L'ARRIVO: IL GRAFICO

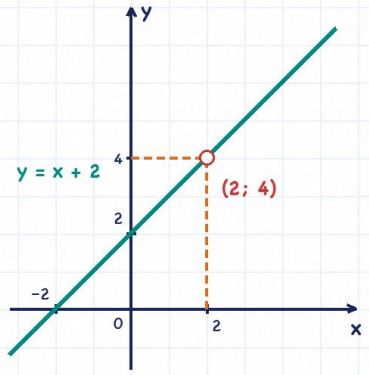


il grafico di $y = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$ taglia l'asse x negli zeri −1, 2 e 3 e l'asse y in (0; 6)

LE FRAZIONI ALGEBRICHE - PRIMA LE CONDIZIONI, POI SI SEMPLIFICA

Matematica - seconda - scomposizioni e frazioni algebriche

"una frazione algebrica esiste solo dove il denominatore è diverso da 0; le condizioni di esistenza si scrivono prima di semplificare, e si semplificano i fattori comuni, mai gli addendi"



la retta $y = x + 2$ è il grafico di $\frac{2x^2-8}{2x-4}$ per $x \neq 2$, e in $(2; 4)$, con il pallino vuoto, la frazione non esiste

① LA FRAZIONE ALGEBRICA

è il quoziente di due polinomi, come $\frac{2x^2-8}{2x-4}$, con il denominatore che non è il polinomio nullo.

ha significato solo per i valori di x che non annullano il denominatore.

② LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

le condizioni di esistenza (C. E.) escludono le x che annullano il denominatore: $2x - 4 = 0$ per $x = 2$, quindi C. E. $x \neq 2$.

si scrivono prima di semplificare, perché dopo la semplificazione il fattore $x - 2$ non compare più.

③ SI SCOMPONE E SI SEMPLIFICA

si scompongono numeratore e denominatore:

$2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$ e $2x - 4 = 2(x - 2)$.

si semplificano i fattori comuni 2 e $x - 2$, e si ha

$\frac{2x^2-8}{2x-4} = x + 2$, con $x \neq 2$.

④ SI SEMPLIFICANO I FATTORI

un fattore comune diverso da 0 si semplifica, un addendo mai: $\frac{x+4}{4}$ non è x, perché con $x = 4$ vale 2 e non 4.

la regola è $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$, con a, b e c polinomi, $b \neq 0$ e $c \neq 0$; c deve moltiplicare tutto il numeratore e tutto il denominatore.

⑤ COME SI LEGGE IL GRAFICO

la frazione e la retta $y = x + 2$ hanno gli stessi valori per $x \neq 2$, e il grafico è la retta con un pallino vuoto in $(2; 4)$.

in $x = 2$ la frazione non esiste, e il pallino vuoto segna il punto che manca: la retta in $x = 2$ vale 4.

TRUCCO

scomponi prima: i fattori del denominatore, uguagliati a 0, danno i valori che le C. E. escludono, e i fattori comuni a numeratore e denominatore sono quelli che si semplificano.

OCCHIO!

le C. E. si scrivono sul denominatore di partenza, prima di semplificare: dopo, il fattore $x - 2$ è sparito e la condizione $x \neq 2$ non si vede più.

per $x = 2$ numeratore e denominatore valgono 0, ma la frazione non vale 0 e non vale 1, perché non esiste: non si divide per 0.

⑥ DA RICORDARE

① una frazione algebrica è il quoziente di due polinomi e ha significato solo per le x che non annullano il denominatore; queste condizioni di esistenza si scrivono prima di semplificare.

② si scompongono numeratore e denominatore e si semplificano i fattori comuni, perché $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ con a, b, c polinomi, $b \neq 0$ e $c \neq 0$; gli addendi non si semplificano.

③ $\frac{2x^2-8}{2x-4} = x + 2$ con $x \neq 2$, perché le due espressioni hanno gli stessi valori per ogni $x \neq 2$ e in $x = 2$ la frazione non esiste.

④ il grafico di $y = \frac{2x^2-8}{2x-4}$ è la retta $y = x + 2$ senza il punto $(2; 4)$, segnato con un pallino vuoto.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) semplificare gli addendi: $\frac{x+4}{4}$ non è x, perché per $x = 4$ vale 2 e non 4.

2) credere che la frazione e $x + 2$ siano la stessa cosa: sono uguali per $x \neq 2$, ma in $x = 2$ la retta vale 4 e la frazione non esiste.