INDICE

dodici capitoli, centootto pagine

1. Le funzioni: il ripasso che serve ... 1
1.1 Dominio e segno di una funzione ... 2
1.2 Le funzioni elementari ... 4
1.3 Le trasformazioni dei grafici ... 5
1.4 Pari, dispari, periodiche, monotone ... 6
1.5 Funzione composta e funzione inversa ... 7

2. I limiti ... 8
2.1 L'idea di limite ... 9
2.2 Limiti infiniti e limiti all'infinito ... 10
2.3 I limiti delle successioni ... 11
2.4 Le operazioni e le forme indeterminate ... 12
2.5 I limiti notevoli ... 15
2.6 Infinitesimi e infiniti ... 18

3. Continuità e asintoti ... 19
3.1 La continuità ... 20
3.2 I teoremi delle funzioni continue ... 21
3.3 I punti di discontinuità ... 22
3.4 Gli asintoti ... 23
3.5 Il grafico probabile ... 26

4. Le derivate ... 27
4.1 Il rapporto incrementale e la derivata ... 28
4.2 Le derivate fondamentali ... 31
4.3 Le regole di derivazione ... 32
4.4 Funzione composta e funzione inversa ... 33
4.5 I punti di non derivabilità ... 36
4.6 Le derivate in fisica ... 37

5. I teoremi del calcolo differenziale ... 38
5.1 Il teorema di Rolle ... 39
5.2 Il teorema di Lagrange ... 40
5.3 Il teorema di Cauchy (liceo scientifico) ... 42
5.4 Il teorema di de l'Hôpital ... 43

6. Lo studio di funzione ... 45
6.1 Crescenza, massimi e minimi ... 46
6.2 Concavità e flessi ... 47
6.3 Lo studio completo ... 49
6.4 Dal grafico di f a quello di f' ... 52
6.5 Le equazioni con parametro ... 54
6.6 La risoluzione approssimata (liceo scientifico) ... 56

7. Problemi di massimo e minimo ... 57
7.1 Il metodo ... 58
7.2 L'ottimizzazione in geometria ... 59
7.3 L'ottimizzazione in fisica e in economia ... 61

8. Gli integrali indefiniti ... 62
8.1 Le primitive e l'integrale indefinito ... 63
8.2 Gli integrali immediati ... 64
8.3 L'integrazione per sostituzione ... 65
8.4 L'integrazione per parti ... 67
8.5 Le funzioni razionali fratte (liceo scientifico) ... 69

9. Gli integrali definiti ... 72
9.1 L'area e l'integrale definito ... 73
9.2 Il teorema fondamentale e la funzione integrale ... 75
9.3 Le aree ... 77
9.4 I volumi dei solidi di rotazione ... 80
9.5 Il teorema della media ... 82
9.6 Gli integrali impropri (liceo scientifico) ... 83
9.7 L'integrazione numerica (liceo scientifico) ... 84

10. Le equazioni differenziali (liceo scientifico) ... 85
10.1 Che cos'è un'equazione differenziale ... 86
10.2 y' = f(x) e il problema di Cauchy ... 87
10.3 Le equazioni a variabili separabili ... 89
10.4 Le equazioni lineari del primo ordine ... 90
10.5 Newton e i modelli esponenziali ... 91

11. La geometria analitica nello spazio ... 93
11.1 Coordinate e vettori nello spazio ... 94
11.2 Il piano ... 95
11.3 La retta ... 96
11.4 La sfera ... 98

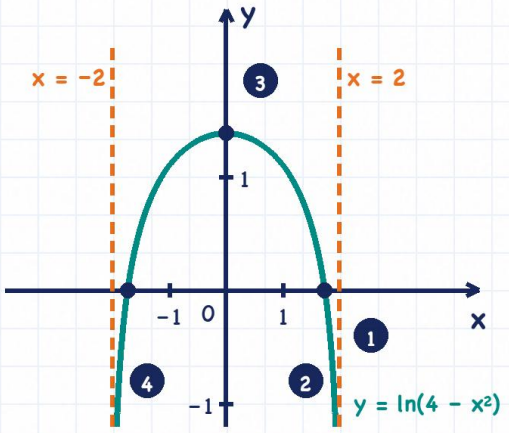
12. Probabilità e distribuzioni ... 100
12.1 Il richiamo: combinatoria e probabilità ... 101
12.2 Le variabili aleatorie discrete ... 103
12.3 La distribuzione binomiale ... 104
12.4 La distribuzione di Poisson (liceo scientifico) ... 106
12.5 Le variabili continue e la distribuzione normale ... 107

CAPITOLO 1

LE FUNZIONI - IL RIPASSO CHE SERVE

Matematica - quinta

"prima dei limiti si ripassa come si legge una funzione:
dove esiste, dove si annulla, che segno ha, quali simmetrie ha"



$y = \ln(4 - x^2)$: un logaritmo composto con una parabola, racchiuso fra le rette $x = -2$ e $x = 2$ senza mai toccarle

1 il logaritmo vuole l'argomento positivo: $4 - x^2 > 0$, cioè $-2 < x < 2$. fuori da questa striscia la funzione non esiste.

2 in $x = -\sqrt{3}$ e in $x = \sqrt{3}$ il grafico taglia l'asse delle x, perché $\ln(4 - 3) = \ln 1 = 0$. fra -2 e $-\sqrt{3}$, e fra $\sqrt{3}$ e 2, la funzione è negativa.

3 in $x = 0$ il grafico taglia l'asse delle y nel suo punto più alto, $(0; \ln 4)$, perché $4 - x^2$ è massimo per $x = 0$ e il logaritmo è crescente.

4 il dominio $]-2; 2[$ è simmetrico e $f(-x) = \ln(4 - (-x)^2) = f(x)$: la funzione è pari, e il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y.

IN QUESTO CAPITOLO

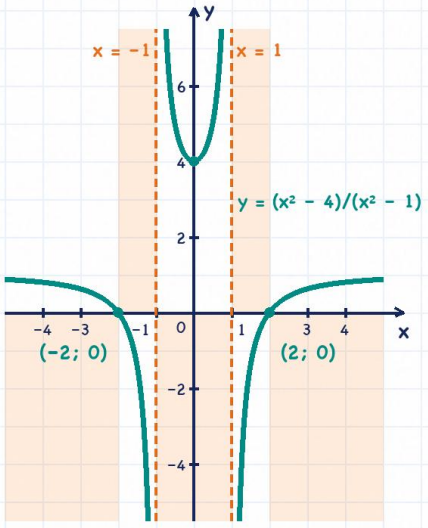
1.1 dominio e segno di una funzione
1.2 le funzioni elementari
1.3 le trasformazioni dei grafici
1.4 pari, dispari, periodiche, monotone
1.5 funzione composta e funzione inversa

all'esame: al liceo scientifico, dal 2023 al 2026, i due problemi della seconda prova sono sempre di analisi, e in ognuno c'è una funzione da studiare.

DOMINIO E SEGNO – DOVE VIVE IL GRAFICO

Matematica – quinta – le funzioni: il ripasso che serve

"prima di disegnare una funzione si cerca dove esiste e dove è positiva: queste due informazioni dicono in quali zone del piano il grafico può stare"



$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$: non esiste in $x=\pm1$; nelle zone colorate il segno vieta il grafico

① IL DOMINIO

è l'insieme dei numeri reali x per cui $f(x)$ si può calcolare: **fuori dal dominio** il grafico non c'è.

se la formula di f pone più condizioni (una frazione, una radice, un logaritmo), devono valere **tutte insieme**: si mettono a sistema.

② LE CONDIZIONI PIÙ FREQUENTI

denominatore diverso da 0; radice di indice pari: radicando ≥ 0; logaritmo: argomento > 0.

$\sqrt{x+1}+\frac{1}{x-2}$ vuole $x \geq -1$ e $x \neq 2$,

cioè $[-1;\,2[\,\cup\,]2;+\infty[$; $\ln(x-3)$ vuole $x > 3$.

③ INTERSEZIONI CON GLI ASSI

con l'asse y si calcola $f(0)$, se 0 sta nel dominio;
con l'asse x si risolve $f(x)=0$, tenendo solo le x del dominio.

per $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ si ha $f(0)=4$, e $f(x)=0$ per $x=-2$ e per $x=2$.

④ IL SEGNO

si risolve $f(x)>0$ nel dominio; in una frazione si studiano a parte il segno di sopra e quello di sotto, poi si moltiplicano i segni.

dove $f(x)>0$ il grafico sta **sopra l'asse x**, dove $f(x)<0$ sta **sotto**. se f è continua nel dominio, il segno cambia solo negli **zeri** o dove f **non esiste**.

⑤ COME SI LEGGE IL GRAFICO

$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ non esiste in $x=-1$ e in $x=1$: il grafico si spezza in **tre rami**.

è positiva per $x<-2$, per $-1<x<1$ e per $x>2$;
negativa per $-2<x<-1$ e per $1<x<2$.

le zone colorate sono quelle **vietate dal segno**: il grafico non ci passa.

TRUCCO

nella tabella dei segni metti una **riga** per ogni fattore, **di sopra e di sotto**: nel dominio, dove **nessun fattore vale 0**, f è **negativa** se i fattori negativi sono in **numero dispari**.

OCCHIO!

una radice di indice pari al denominatore vuole il radicando **strettamente positivo**, perché non si divide per 0; per esempio $\frac{1}{\sqrt{x}}$ esiste solo per $x>0$.

il dominio si scrive **prima di semplificare**: $\frac{x^2-1}{x-1}$ non esiste in $x=1$, anche se somiglia a $x+1$.

⑥ DA RICORDARE

1. dominio, le condizioni più frequenti: denominatore **diverso da 0**; radicando ≥ 0 nelle radici di indice pari; argomento del logaritmo >0.
2. **asse y**: si calcola $f(0)$, se 0 sta nel dominio; **asse x**: le soluzioni di $f(x)=0$ che stanno nel dominio.
3. dove $f(x)>0$ il grafico sta **sopra l'asse x**, dove $f(x)<0$ sta **sotto**.
4. **prima il dominio**: zeri e segno si cercano solo **dentro il dominio**.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) dimenticare l'uguale: $\sqrt{x-3}$ esiste anche per $x=3$, perché $\sqrt{0}=0$.
2) tenere una soluzione fuori dal dominio: $\frac{x^2}{x}=0$ non ha soluzioni, perché $x=0$ è escluso.

DOMINIO E SEGNO - SEI PASSI E LE ZONE VIETATE

Matematica - quinta - le funzioni: il ripasso che serve

"il dominio dice dove il grafico esiste, il segno se sta sopra o sotto l'asse x: insieme cancellano le zone del piano dove il grafico non può passare"

L'ESEMPIO: $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$, con la radice solo al numeratore

1 LE CONDIZIONI

una condizione per ogni pezzo che può non esistere

$4 - x^2 \geq 0$ per la radice;
$x - 1 \neq 0$ per il denominatore

2 IL DOMINIO

risolvi e metti a sistema: le condizioni devono valere insieme

$-2 \leq x \leq 2$ e $x \neq 1$,
cioè $[-2; 1[\cup]1; 2]$

3 GLI ASSI

asse y con $x = 0$; asse x con $f(x) = 0$, dentro il dominio

$f(0) = \frac{2}{(-1)} = -2$;
$f(x) = 0$ per $x = -2$ e per $x = 2$

4 IL SEGNO DEI PEZZI

studia a parte il segno di sopra e quello di sotto

$\sqrt{4 - x^2} > 0$ per $-2 < x < 2$;
$x - 1 > 0$ per $x > 1$

5 IL SEGNO DI f

moltiplica i segni, intervallo per intervallo

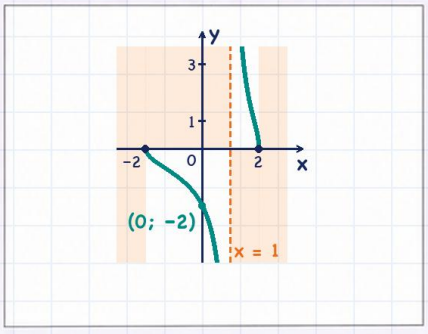
$f(x) < 0$ per $-2 < x < 1$;
$f(x) > 0$ per $1 < x < 2$

6 LE ZONE VIETATE

cancella le zone del piano dove il grafico non può stare

fuori da $[-2; 2]$;
sopra l'asse x per $-2 < x < 1$;
sotto l'asse x per $1 < x < 2$

7 IL GRAFICO

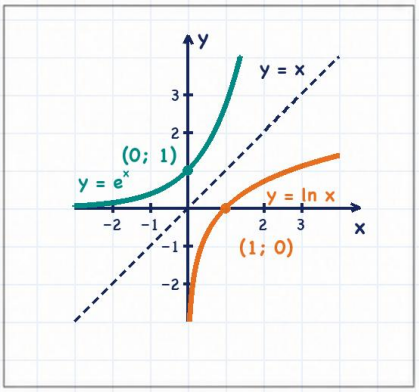


il grafico di f vive solo nelle zone bianche: sotto l'asse x a sinistra di 1, sopra a destra

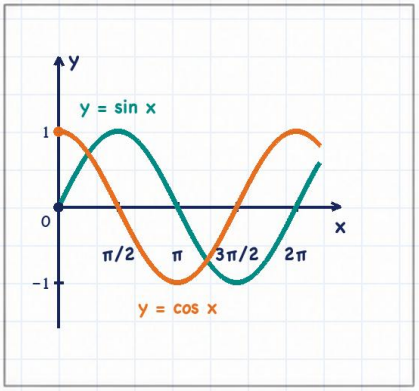
LE FUNZIONI ELEMENTARI - I GRAFICI DA SAPERE

Matematica - quinta - le funzioni: il ripasso che serve

"le funzioni che si studiano in quinta sono costruite con poche funzioni elementari: i loro grafici vanno riconosciuti a colpo d'occhio".



$y = e^x$ e $y = \ln x$: simmetriche rispetto alla retta $y = x$



$y = \sin x$ e $y = \cos x$: periodo 2π, valori fra -1 e 1

① ESPONENZIALE

$y = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$: definita per ogni x reale, sempre positiva, passa per $(0; 1)$.

cresce se $a > 1$, decresce se $0 < a < 1$; l'asse x è asintoto, a sinistra se $a > 1$, a destra se $0 < a < 1$.

② LOGARITMO

$y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$: esiste solo per $x > 0$ e passa per $(1; 0)$; l'asse y è asintoto.

è l'inversa dell'esponenziale con la stessa base: $\log_a(a^x) = x$ per ogni x reale; $\ln x$ è il logaritmo in base e $\approx 2{,}718$.

③ SENO, COSENO E TANGENTE

seno e coseno: definiti per ogni x reale, valori fra -1 e 1, periodo 2π (x in radianti); $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, il seno spostato di $\pi/2$ a sinistra.

$\tan x = \sin x / \cos x$ esiste per $x \neq \pi/2 + k\pi$ (k intero), ha periodo π e asintoti verticali $x = \pi/2 + k\pi$.

④ COME SI LEGGONO I GRAFICI

a sinistra e^x e $\ln x$, simmetriche rispetto alla retta $y = x$: il punto $(0; 1)$ diventa $(1; 0)$.

a destra seno e coseno: fra 0 e 2π il seno si annulla in 0, π e 2π, il coseno in $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$; gli zeri si ripetono ogni π.

⑤ DA RICORDARE

① a^x, con $a > 0$ e $a \neq 1$: sempre positiva, passa per $(0; 1)$; cresce se $a > 1$.
② $\ln x$: esiste solo per $x > 0$, passa per $(1; 0)$, è negativo per $0 < x < 1$.
③ e^x e $\ln x$ sono inverse: i grafici sono simmetrici rispetto a $y = x$.
④ $\sin x$ e $\cos x$: fra -1 e 1, periodo 2π, x in radianti; $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) far esistere $\ln x$ per $x \leq 0$: né $\ln 0$ né $\ln(-1)$ esistono.

2) calcolare $\sin x$ in gradi: in analisi x è in radianti, e $\sin 1$ è il seno di 1 radiante.

LE TRASFORMAZIONI – DA UN GRAFICO NOTO A UNO NUOVO

Matematica – quinta – le funzioni: il ripasso che serve

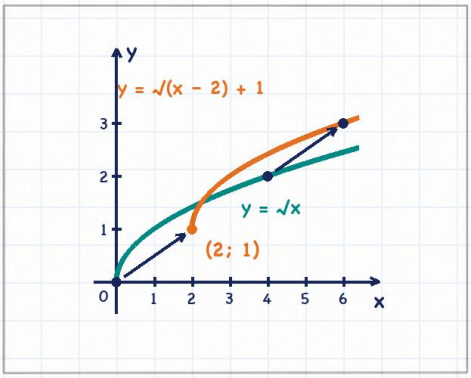
"da un grafico noto se ne ottengono molti altri senza fare calcoli: lo si sposta, lo si ribalta, lo si piega col valore assoluto"

1. TRASLAZIONI

$y = f(x-h)+k$: il grafico di f **si sposta** di h in orizzontale e di k in verticale.

$h > 0$ **verso destra**, $k > 0$ **verso l'alto**:

$\sqrt{x-2}+1$ è $\sqrt{x}$ spostata di 2 a destra e di 1 in su.

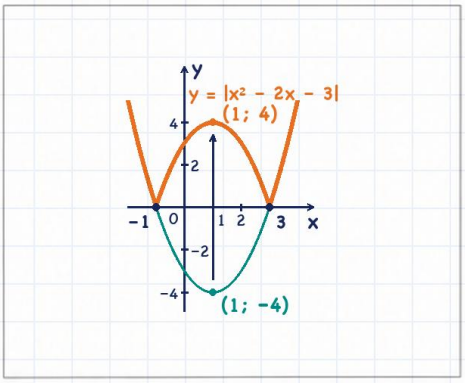


$y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x-2}+1$, spostata di 2 a destra e di 1 in su: $(0;0)$ va in $(2;1)$

2. SIMMETRIE

$y = -f(x)$ è il **simmetrico** del grafico di f rispetto all'asse x; $y = f(-x)$ è il **simmetrico** rispetto all'asse y.

$-e^x$ sta tutta sotto l'asse x; e^{-x} è e^x ribaltata da destra a sinistra.



$y = x^2-2x-3$ e $y = |x^2-2x-3|$: il tratto sotto l'asse x si ribalta

3. VALORE ASSOLUTO

$y = |f(x)|$: dove $f(x) \geq 0$ il grafico **resta** com'è, dove $f(x) < 0$ **si ribalta** sopra l'asse x.

in $|x^2-2x-3|$ si ribalta il tratto fra -1 e 3: il vertice $(1;-4)$ va in $(1;4)$.

4. IL MODULO DENTRO

$y = f(|x|)$: **si cancella** la parte del grafico con $x < 0$ e al suo posto **si copia**, simmetrica rispetto all'asse y, quella con $x \geq 0$.

ne esce sempre una **funzione pari**: $\ln|x|$ esiste per ogni $x \neq 0$ ed è $\ln x$ con, a sinistra, la sua copia simmetrica rispetto all'asse y.

5. DA RICORDARE

1. $f(x-h)+k$: di h in orizzontale (a destra se $h>0$) e di k in verticale (in su se $k>0$).
2. $-f(x)$: simmetria rispetto all'asse x; $f(-x)$: simmetria rispetto all'asse y.
3. $|f(x)|$: le parti sotto l'asse x si ribaltano sopra; $f(|x|)$: si cancella la parte con $x<0$ e al suo posto si copia, simmetrica, quella con $x \geq 0$.
4. traslando, il dominio si sposta di h (k non lo cambia) e gli eventuali asintoti seguono il grafico: $\sqrt{x-2}+1$ esiste per $x \geq 2$.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) credere che $f(x-2)$ sposti a sinistra: il meno dentro la parentesi **sposta a destra**.
2) confondere $|f(x)|$ con $f(|x|)$: la prima **ribalta in su** le parti negative, la seconda **cancella** la parte sinistra e al suo posto copia la destra, simmetrica rispetto all'asse y.