INDICE

dodici capitoli, centootto pagine

1. Le funzioni e i loro grafici: il ripasso che serve . 1
1.1 Dominio, codominio e immagine ... 2
1.2 Funzioni iniettive e funzione inversa ... 3
1.3 La funzione composta ... 5
1.4 Le proprietà e la velocità di variazione ... 6

2. La funzione esponenziale ... 7
2.1 La funzione esponenziale e i suoi grafici ... 8
2.2 Il numero e ... 10
2.3 Le equazioni esponenziali ... 11
2.4 Le disequazioni esponenziali ... 13
2.5 Modelli di crescita e di decadimento ... 14

3. I logaritmi ... 15
3.1 La definizione di logaritmo ... 16
3.2 La funzione logaritmica ... 17
3.3 Le proprietà dei logaritmi ... 19
3.4 Le equazioni logaritmiche ... 20
3.5 Le disequazioni logaritmiche ... 22
3.6 Cambio di base ed equazioni esponenziali ... 23

4. Gli angoli e le funzioni goniometriche ... 25
4.1 Gli angoli e la loro misura ... 26
4.2 Seno, coseno e angoli notevoli ... 27
4.3 La tangente ... 29
4.4 Le relazioni fondamentali ... 31
4.5 Gli angoli associati ... 32
4.6 I grafici di seno e coseno e le sinusoidi ... 34

5. Le formule goniometriche ... 37
5.1 Addizione e sottrazione ... 38
5.2 Duplicazione e identità ... 40
5.3 La bisezione (liceo scientifico) ... 42
5.4 Le formule parametriche (liceo scientifico) ... 43
5.5 Prostaferesi e Werner (liceo scientifico) ... 44

6. Equazioni e disequazioni goniometriche ... 45
6.1 Le equazioni elementari ... 46
6.2 Le equazioni riconducibili alle elementari ... 48
6.3 Le disequazioni elementari ... 50
6.4 Le equazioni lineari (liceo scientifico) ... 52
6.5 Le equazioni omogenee (liceo scientifico) ... 53
6.6 Disequazioni non elementari (liceo scientifico) ... 54

7. La trigonometria ... 55
7.1 I triangoli rettangoli ... 56
7.2 L'area di un triangolo ... 59
7.3 Il teorema dei seni ... 60
7.4 Il teorema del coseno ... 62
7.5 I poligoni regolari e il cerchio ... 64
7.6 La trigonometria in fisica ... 65

8. I numeri complessi (liceo scientifico) ... 66
8.1 La forma algebrica ... 67
8.2 Il piano di Gauss ... 69
8.3 La forma trigonometrica ... 70
8.4 Le radici n-esime ... 72
8.5 Le equazioni nel campo complesso ... 74

9. La geometria nello spazio ... 75
9.1 Rette e piani nello spazio ... 76
9.2 Parallelismo e perpendicolarità ... 77
9.3 I poliedri (liceo scientifico) ... 79
9.4 I solidi di rotazione (liceo scientifico) ... 81
9.5 Aree e volumi (liceo scientifico) ... 82

10. Il calcolo combinatorio ... 84
10.1 Principio fondamentale e disposizioni ... 85
10.2 Le permutazioni ... 86
10.3 Le combinazioni ... 87
10.4 Coefficienti binomiali e binomio di Newton ... 89
10.5 I problemi tipici ... 91

11. La probabilità ... 92
11.1 La probabilità classica ... 93
11.2 L'unione di eventi ... 94
11.3 La probabilità condizionata ... 95
11.4 Probabilità composta e indipendenza ... 96
11.5 Probabilità totale e teorema di Bayes ... 98
11.6 Le prove ripetute (liceo scientifico) ... 100
11.7 Probabilità e calcolo combinatorio ... 102

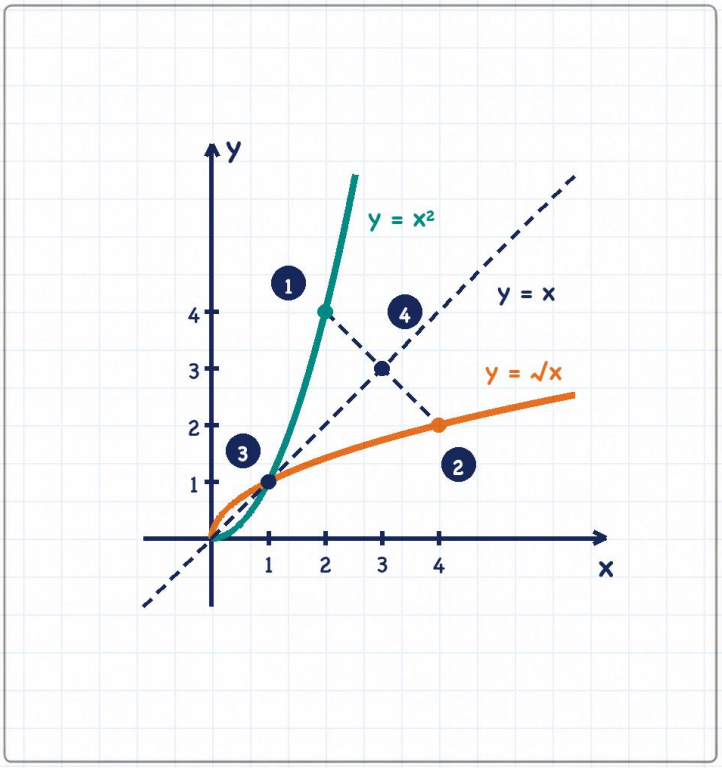
12. Le successioni (liceo scientifico) ... 103
12.1 Che cos'è una successione ... 104
12.2 Le progressioni aritmetiche ... 105
12.3 Le progressioni geometriche ... 106
12.4 Il principio di induzione ... 107

CAPITOLO 1

LE FUNZIONI E I LORO GRAFICI – IL RIPASSO CHE SERVE

Matematica - quarta

"il grafico dell'inversa di una funzione invertibile è il simmetrico di quello della funzione rispetto alla retta $y = x$: il punto $(a; b)$ diventa il punto $(b; a)$"



$y = x^2$, con $x \geq 0$ (verde acqua), e la sua inversa $y = \sqrt{x}$ (arancione): simmetriche rispetto alla bisettrice $y = x$

1 il punto $(2; 4)$ sta sul grafico di $f(x) = x^2$, con $x \geq 0$, perché $f(2) = 2^2 = 4$.

2 scambiando le coordinate si ottiene $(4; 2)$, che sta sul grafico dell'inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$, perché 2 è la radice quadrata di 4.

3 il punto $(1; 1)$ ha le coordinate uguali, quindi scambiandole resta lo stesso: sta sulla bisettrice $y = x$ ed è comune alle due curve, perché $1^2 = 1$ e $\sqrt{1} = 1$.

4 il punto medio del segmento che unisce $(2; 4)$ e $(4; 2)$ è $(3; 3)$, sulla bisettrice: la retta $y = x$ è perpendicolare al segmento e lo taglia a metà.

IN QUESTO CAPITOLO

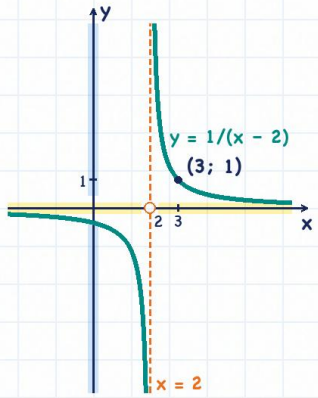
1.1 dominio, codominio e immagine
1.2 funzioni iniettive e funzione inversa
1.3 la funzione composta
1.4 le proprietà e la velocità di variazione

all'esame: nella seconda prova dello scientifico il quadro nomina invertibilità, composizione, parità e monotonia; l'inversa è fra le richieste dei problemi del 2023 e del 2025.

DOMINIO, CODOMINIO E IMMAGINE - PARTENZA E ARRIVO

Matematica - quarta - le funzioni e i loro grafici: il ripasso che serve

"il dominio dice per quali x la funzione esiste e si legge sull'asse x; l'immagine dice quali valori assume e si legge sull'asse y"



$y = 1/(x-2)$, con in giallo il dominio (esclude 2) e in azzurro l'immagine (esclude 0)

1. DOMINIO E CODOMINIO

una funzione associa a ogni x del dominio un solo valore $y = f(x)$; il codominio è l'insieme di arrivo, di solito $\mathbb{R}$.
se è data da una formula e non si dice altro, il dominio è l'insieme delle x per cui la formula si può calcolare.

2. L'IMMAGINE

l'immagine è l'insieme dei valori $f(x)$ al variare di x nel dominio: è contenuta nel codominio e può essere più piccola.
$f(x) = x^2$, con codominio $\mathbb{R}$, assume solo valori ≥ 0: l'immagine è $[0; +\infty[$.

3. LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

le più comuni: denominatore diverso da 0; radice di indice pari, radicando ≥ 0; logaritmo, argomento > 0 (con base $a > 0$ e $a \neq 1$).
le condizioni valgono tutte insieme: $\frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ vuole $x \geq 1$ e $x \neq 3$, quindi il dominio è $[1; 3[\cup]3; +\infty[$.

4. L'ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ non esiste per $x = 2$, dove il denominatore si annulla: il dominio è $x \neq 2$, cioè $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

da $\frac{1}{x-2} = y$ si ricava $x = 2 + \frac{1}{y}$, possibile per ogni $y \neq 0$; per $y = 0$ non c'è soluzione: l'immagine è $y \neq 0$.

5. COME SI LEGGE IL GRAFICO

la striscia gialla sull'asse x è il dominio: tutte le x tranne 2, dove c'è il pallino vuoto e passa la retta tratteggiata.
la striscia azzurra sull'asse y è l'immagine: tutti i valori tranne 0, perché i due rami non toccano mai l'asse x.
il punto (3; 1) sta sul grafico, perché $f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$.

TRUCCO

per ogni pezzo della formula che può non esistere (frazione, radice di indice pari, logaritmo) scrivi la condizione di esistenza e mettile tutte a sistema: il dominio è la soluzione.

OCCHIO!

il dominio si cerca prima di semplificare: $\frac{x^2-4}{x-2}$ non esiste per $x = 2$, anche se per $x \neq 2$ vale $x + 2$.
una radice di indice pari a denominatore vuole il radicando > 0 e non ≥ 0; per esempio $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non esiste per $x = 0$.

6. DA RICORDARE

1. dominio: le x in cui f è definita (con la sola formula, quelle per cui si calcola); codominio: l'insieme di arrivo; immagine: i valori assunti davvero, contenuta nel codominio.
2. condizioni di esistenza più comuni: denominatore $\neq 0$; radicando ≥ 0 se l'indice è pari; argomento del logaritmo > 0, con base $a > 0$ e $a \neq 1$; valgono tutte insieme.
3. il dominio si cerca prima di semplificare; con una radice di indice pari a denominatore il radicando è > 0.
4. il dominio si legge sull'asse x e l'immagine sull'asse y: per $\frac{1}{x-2}$ sono $x \neq 2$ e $y \neq 0$.

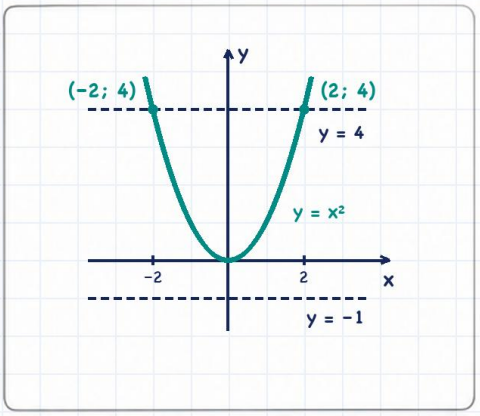
⚠ I TRABOCCHETTI

1) dimenticare l'uguale nelle radici di indice pari: $\sqrt{x-3}$ esiste anche per $x = 3$, perché $\sqrt{0} = 0$.
2) dire che $\frac{1}{x-2}$ ha immagine $\mathbb{R}$, mentre non vale mai 0, perché una frazione con numeratore 1 non si annulla.

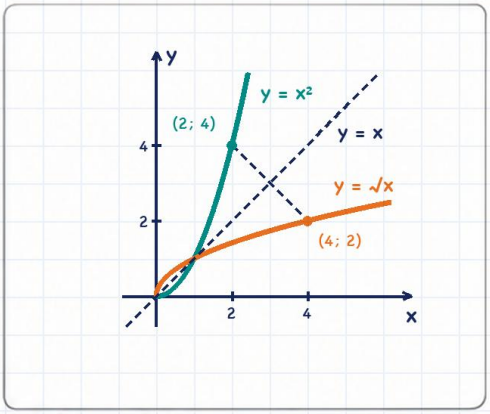
INIETTIVE E INVERSA – LA STRADA DI RITORNO

Matematica – quarta – le funzioni e i loro grafici: il ripasso che serve

"una funzione iniettiva ha l'inversa sulla propria immagine, e il grafico dell'inversa è il simmetrico di quello della funzione rispetto alla retta $y = x$"



$y = x^2$ su $\mathbb{R}$: la retta $y = 4$ la taglia in $(-2;4)$ e $(2;4)$, la retta $y = -1$ mai



$y = x^2$ per $x \geq 0$ (verde acqua) e $y = \sqrt{x}$ (arancione), simmetriche rispetto a $y = x$, e $(2;4)$ diventa $(4;2)$

1 INIETTIVA, SURIETTIVA, BIIETTIVA

iniettiva: per ogni $x_1 \neq x_2$ del dominio, $f(x_1) \neq f(x_2)$; **suriettiva:** ogni valore del codominio è $f(x)$ per almeno una x.

biiettiva: iniettiva e suriettiva, cioè ogni valore del codominio viene da una e una sola x.

2 LA RETTA ORIZZONTALE

con codominio $\mathbb{R}$, f è **iniettiva** se ogni retta orizzontale $y = k$ taglia il grafico al più una volta, ed è **suriettiva** se ognuna lo taglia almeno una volta.

x^2 su $\mathbb{R}$ **non è iniettiva** ($y = 4$ la taglia due volte) **né suriettiva** ($y = -1$ non la taglia).

3 LA FUNZIONE INVERSA

se f è **biiettiva** da A a B, f^{-1} porta ogni y di B nell'unica x di A con $f(x) = y$; se f è solo **iniettiva**, si prende per B la sua immagine.

il grafico di f^{-1} è il **simmetrico** di quello di f rispetto alla retta $y = x$: il punto $(a;b)$ diventa $(b;a)$.

4 RESTRINGERE IL DOMINIO

x^2 non è iniettiva su $\mathbb{R}$, ma lo è per $x \geq 0$, dove ha immagine $[0;+\infty[$ e inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, con $x \geq 0$.

per $x \leq 0$ anche x^2 è iniettiva, ma l'inversa è $-\sqrt{x}$, con $x \geq 0$.

5 DA RICORDARE

1. **iniettiva:** $f(x_1) \neq f(x_2)$ per $x_1 \neq x_2$ nel dominio, cioè ogni retta orizzontale taglia il grafico al più una volta.
2. f **biiettiva** da A a B ha l'inversa f^{-1} da B ad A, con $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni x di A e $f(f^{-1}(y)) = y$ per ogni y di B.
3. se f **non è iniettiva** non ha inversa: **si restringe il dominio** dove lo è, e l'inversa dipende dalla restrizione.
4. se f è invertibile, il grafico di f^{-1} è il **simmetrico** di quello di f rispetto a $y = x$, e il **dominio** di f^{-1} è **l'immagine** di f.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) scrivere $1/f(x)$ per $f^{-1}(x)$: per $f(x) = 2x$ l'inversa è $x/2$, mentre il reciproco è $1/(2x)$.
2) scrivere $\pm\sqrt{x}$ come inversa di x^2: un'inversa dà un solo valore per ogni x, $\sqrt{x}$ se si restringe x^2 a $x \geq 0$ e $-\sqrt{x}$ se si restringe a $x \leq 0$.

L'INVERSA DI UNA FUNZIONE - SEI PASSI E UN GRAFICO

Matematica - quarta - le funzioni e i loro grafici: il ripasso che serve

"l'inversa di una funzione iniettiva si trova scambiando x e y e ricavando y: il suo dominio è l'immagine di f e il suo grafico è il simmetrico di quello di f rispetto a $y = x$"

L'ESEMPIO: $f(x) = \sqrt{x - 1} + 2$

1 DOMINIO E IMMAGINE

trova dominio e immagine di f: diventeranno immagine e dominio dell'inversa

$x - 1 \geq 0$ dà $x \geq 1$, e $\sqrt{x-1} \geq 0$ dà $f(x) \geq 2$: dominio $[1; +\infty[$, immagine $[2; +\infty[$

2 CONTROLLA L'INIETTIVITÀ

se f è strettamente crescente o strettamente decrescente, è iniettiva e ha l'inversa sulla sua immagine

la radice cresce con x, quindi f è strettamente crescente: è iniettiva e ha l'inversa

3 SCAMBIA LE LETTERE

scrivi $y = f(x)$ e scambia i nomi di x e di y

da $y = \sqrt{x - 1} + 2$ si passa a $x = \sqrt{y - 1} + 2$

4 RISOLVI L'EQUAZIONE

ricava y; se togli la radice elevando al quadrato, tieni la condizione di segno

$\sqrt{y - 1} = x - 2$ con $x - 2 \geq 0$; al quadrato $y - 1 = (x - 2)^2$, quindi $y = (x - 2)^2 + 1$

5 DOMINIO DELL'INVERSA

il dominio di f^{-1} è l'immagine di f, e l'immagine di f^{-1} è il dominio di f

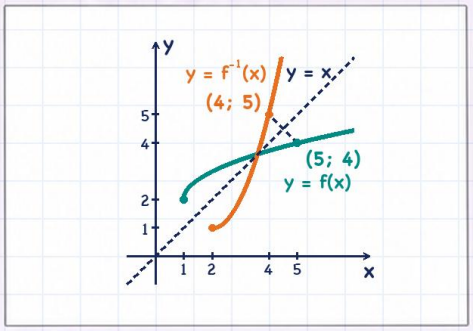
$f^{-1}(x) = (x - 2)^2 + 1$ per $x \geq 2$, con immagine $[1; +\infty[$

6 CONTROLLA UN PUNTO

se f è invertibile e (a; b) sta sul grafico di f, allora (b; a) sta su quello di f^{-1}

$f(5) = \sqrt{5 - 1} + 2 = 2 + 2 = 4$;
$f^{-1}(4) = (4 - 2)^2 + 1 = 5$:
il punto (5; 4) diventa (4; 5)

7 IL GRAFICO



$y = \sqrt{x - 1} + 2$ (verde acqua) e la sua inversa $y = (x - 2)^2 + 1$ per $x \geq 2$ (arancione), simmetriche rispetto alla retta $y = x$

LA FUNZIONE COMPOSTA – PRIMA UNA, POI L'ALTRA

Matematica – quarta – le funzioni e i loro grafici: il ripasso che serve

" la composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ applica prima f e poi g, esiste per le x del dominio di f con f(x) nel dominio di g e in generale cambia se si scambiano le funzioni ".

① A CHE COSA SERVE

comporre vuol dire dare il risultato di una funzione come dato a un'altra, per costruire funzioni complicate da pezzi semplici e per smontarle.

$\sqrt{x^2 - 1}$, per esempio, è $x^2 - 1$ seguita dalla radice quadrata.

OCCHIO!

$g \circ f$ non è il prodotto $g(x) \cdot f(x)$: nella composta il risultato di f diventa il dato di g.

il dominio si cerca prima di semplificare: $(\sqrt{x})^2 - 1$ si riduce a $x - 1$, ma la composta esiste solo per $x \geq 0$.

② LA COMPOSTA

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

si calcola prima f(x) e poi si dà il risultato a g, da destra a sinistra; si legge «g composta f».

esiste per le x del dominio di f per cui f(x) sta nel dominio di g.

③ L'ORDINE CONTA

in generale $g \circ f$ e $f \circ g$ sono funzioni diverse: con $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ per $|x| \geq 1$.

mentre $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$ per $x \geq 0$: due funzioni con formule e domini diversi.

④ SCOMPORRE

si guarda l'ultima operazione che si esegue: in $\sqrt{x^2 - 1}$ è la radice, quindi $g(x) = \sqrt{x}$, e dentro sta $f(x) = x^2 - 1$.

⑤ LA COMPOSTA CON L'INVERSA

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

se f è invertibile, $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni x del dominio di f, e $f(f^{-1}(y)) = y$ per ogni y dell'immagine di f.

per $f(x) = 2x + 1$ l'inversa è $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$, e $f^{-1}(f(x)) = \frac{2x + 1 - 1}{2} = x$.

⑥ ESEMPIO SVOLTO

$f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \sqrt{x - 1}$: si cercano $g \circ f$ e il suo dominio.

$(g \circ f)(x) = g(\frac{1}{x}) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$, e servono $x \neq 0$ (dominio di f) e $\frac{1}{x} \geq 1$ (f(x) nel dominio di g).

$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x} \geq 0$ vale per $0 < x \leq 1$, quindi il dominio di $g \circ f$ è $]0;1]$, più piccolo di quello di f.

controllo: per $x = 1/4$ si ha $f(x) = 4$ e $g(4) = \sqrt{3}$; per $x = -2$, $f(-2) = -1/2$ non sta nel dominio di g.

TRUCCO

per scomporre chiediti quale operazione fai per ultima quando calcoli il valore: quella è g, e ciò che le sta dentro è f; la scomposizione non è unica.

⑦ DA RICORDARE

1. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: prima f, poi g; esiste per le x del dominio di f per cui f(x) sta nel dominio di g.
2. in generale $g \circ f \neq f \circ g$: con $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$, $g \circ f$ è $\sqrt{x^2 - 1}$ per $|x| \geq 1$ e $f \circ g$ è $x - 1$ per $x \geq 0$.
3. il dominio della composta si cerca prima di semplificare: la formula ridotta può esistere in più punti della composta.
4. se f è invertibile, $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni x del dominio di f e $f(f^{-1}(y)) = y$ per ogni y dell'immagine di f.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) scambiare l'ordine: con $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$, per $x = 5$ si ha $\sqrt{24} \approx 4{,}9$ con $g \circ f$ e 4 con $f \circ g$.
2) dimenticare che f(x) deve stare nel dominio di g: per $x = 0$, $f(0) = -1$ non sta nel dominio di $\sqrt{x}$, quindi $(g \circ f)(0)$ non esiste.