INDICE

undici capitoli, centootto pagine

1. I numeri naturali e interi ... 1
- 1.1 I numeri naturali e le quattro operazioni ... 2
- 1.2 Le potenze e le loro proprietà ... 3
- 1.3 Multipli, divisori, MCD e mcm ... 5
- 1.4 I numeri interi e la retta orientata ... 7
- 1.5 Operare con gli interi relativi ... 8
- 1.6 Le espressioni con le parentesi ... 10

2. Le frazioni e i numeri razionali ... 12
- 2.1 Le frazioni come numeri: equivalenza e minimi t... 13
- 2.2 La retta dei razionali e il confronto ... 14
- 2.3 Addizione e sottrazione di frazioni ... 15
- 2.4 Moltiplicazione, divisione, reciproco e potenze ... 17
- 2.5 Numeri decimali e frazione generatrice ... 18
- 2.6 Proporzioni e percentuali ... 20
- 2.7 Le espressioni con le frazioni ... 22

3. Gli insiemi e la logica ... 24
- 3.1 Che cos'è un insieme: rappresentazioni, appart... 25
- 3.2 Unione, intersezione, differenza ... 27
- 3.3 Complementare, insieme universo, prodotto ca... 29
- 3.4 N, Z e Q come insiemi ... 30
- 3.5 Enunciati e connettivi: non, e, o ... 31
- 3.6 Implicazione e quantificatori ... 33

4. Monomi e polinomi ... 35
- 4.1 Il monomio: coefficiente, parte letterale e grado ... 36
- 4.2 Somma e differenza di monomi ... 37
- 4.3 Prodotto, quoziente e potenza di monomi ... 38
- 4.4 MCD e mcm di monomi ... 40
- 4.5 Il polinomio: grado, forma normale, ordinamento ... 41
- 4.6 Somma, differenza e prodotto di polinomi ... 42
- 4.7 I prodotti notevoli ... 44

5. Le equazioni di primo grado ... 46
- 5.1 Identità ed equazioni: soluzione, verifica, princi... 47
- 5.2 Parentesi, denominatori e casi speciali ... 48
- 5.3 Dal problema all'equazione ... 50
- 5.4 Percentuali e proporzioni dentro un'equazione ... 52

6. Rette, segmenti e angoli ... 54
- 6.1 Punto, retta, piano: gli enti primitivi e gli assiomi ... 55
- 6.2 Semirette e segmenti: confronto, somma, differ... 56
- 6.3 L'angolo: che cos'è e come si classifica ... 58
- 6.4 La misura degli angoli: gradi, primi e secondi ... 59
- 6.5 Coppie di angoli: consecutivi, adiacenti, oppost... 61
- 6.6 Bisettrice, rette perpendicolari, distanza e asse ... 63

7. I triangoli ... 64
- 7.1 Che cos'è un triangolo e come si chiama: per i l... 65
- 7.2 Altezze, mediane, bisettrici e assi: segmenti, ret... 66
- 7.3 La congruenza e i tre criteri: come si scrive una... 67
- 7.4 Il triangolo isoscele e l'equilatero: teorema dire... 69
- 7.5 L'angolo esterno e le disuguaglianze fra lati e a... 70

8. Scomposizioni e frazioni algebriche (liceo... 72
- 8.1 Il raccoglimento totale e parziale ... 73
- 8.2 I prodotti notevoli letti al contrario, somma e dif... 74
- 8.3 Il trinomio speciale: somma e prodotto ... 75
- 8.4 La divisione per x − a e la regola di Ruffini ... 77
- 8.5 MCD e mcm di polinomi ... 78
- 8.6 Le frazioni algebriche: condizioni di esistenza e... 79
- 8.7 Le operazioni con le frazioni algebriche ... 80

9. Le disequazioni di primo grado (liceo scie... 82
- 9.1 Disuguaglianze e disequazioni: che cos'è una s... 83
- 9.2 I due principi di equivalenza e il cambio di verso ... 84
- 9.3 Le disequazioni intere: procedura e scrittura del... 85
- 9.4 I sistemi di disequazioni ... 87
- 9.5 Il segno di un prodotto e di un quoziente ... 88
- 9.6 I problemi con le disequazioni ... 89

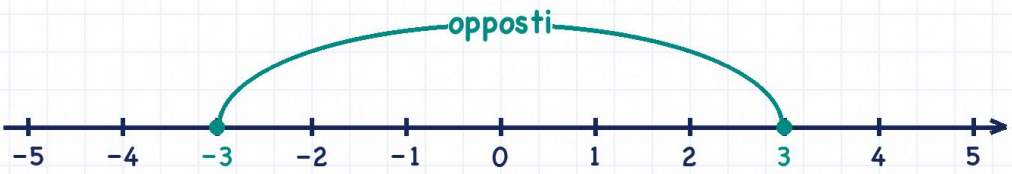
10. Rette parallele e quadrilateri ... 91
- 10.1 Le rette parallele e gli angoli della trasversale ... 92
- 10.2 La somma degli angoli di un triangolo e di un... 93
- 10.3 I criteri di congruenza dei triangoli rettangoli ... 94
- 10.4 Il trapezio ... 95
- 10.5 Il parallelogramma: proprietà e criteri ... 96
- 10.6 Rettangolo, rombo e quadrato ... 98
- 10.7 Parallele e quadrilateri nei problemi ... 99

11. La statistica ... 100
- 11.1 Popolazione, unità statistica e carattere: dai d... 101
- 11.2 Frequenza assoluta, relativa e percentuale ... 102
- 11.3 I grafici: barre, areogramma, e come si leggo... 103
- 11.4 La media aritmetica, semplice e ponderata ... 104
- 11.5 Mediana e moda: i tre indici a confronto ... 105
- 11.6 Il campo di variazione ... 107

CAPITOLO 1

I NUMERI NATURALI E INTERI

"Il meno davanti a un numero mi sembrava un errore. Poi ho visto la retta: −3 è dall'altra parte dello zero, alla stessa distanza di 3."



sulla retta orientata ogni numero ha il suo posto: 3 e −3 sono opposti, alla stessa distanza dallo zero.

IN QUESTO CAPITOLO

1.1 I numeri naturali e le quattro operazioni
1.2 Le potenze e le loro proprietà
1.3 Multipli, divisori, MCD e mcm
1.4 I numeri interi e la retta orientata
1.5 Operare con gli interi relativi
1.6 Le espressioni con le parentesi

ALLA FINE SAPRAI

- ✓ mettere in ordine numeri positivi e negativi sulla retta
- ✓ calcolare MCD e mcm scomponendo in fattori primi
- ✓ calcolare un'espressione rispettando l'ordine delle operazioni

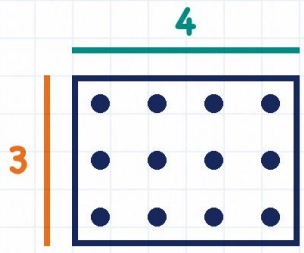
TI SERVE RICORDARE

- le tabelline e le quattro operazioni
- le potenze con esponente naturale

I numeri naturali e le quattro operazioni

Matematica - prima - aritmetica

"Sapevo fare i conti, ma non sapevo perché $3 \cdot 4$ e $4 \cdot 3$ danno lo stesso. Poi ho disegnato i puntini: è lo stesso rettangolo, girato."



$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$$

quattro colonne di tre puntini o tre righe di quattro: lo stesso rettangolo, sempre 12 puntini.

1 I NUMERI NATURALI

I naturali sono 0, 1, 2, 3, ...: non finiscono mai, ogni numero ha un successivo. L'insieme si indica con N.
Sulla retta stanno in ordine da sinistra a destra: 7 viene dopo 5, quindi $7 > 5$.

$$N = \{0; 1; 2; 3; ...\}$$

2 ADDIZIONE E MOLTIPLICAZIONE

Addizione e moltiplicazione si fanno sempre in N.
Commutative: $3 + 4 = 4 + 3$ e $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.
Associative: $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$.
La distributiva le lega:
$3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$.

$$3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$$

3 SOTTRAZIONE E DIVISIONE

Sono le operazioni inverse: $9 - 4 = 5$ perché $5 + 4 = 9$; $12 : 4 = 3$ perché $3 \cdot 4 = 12$.
Non sono commutative.
In N si sottrae solo se il primo numero non è minore del secondo: $4 - 9$ non è un naturale.
Si divide solo se il primo è multiplo del secondo: $13 : 4$ non è un naturale.

$12 : 4 = 3$ perché $3 \cdot 4 = 12$

OCCHIO!

$12 : 4 = 3$, ma $4 : 12$ non è un naturale: la divisione non è commutativa.
$0 : 5 = 0$, ma $5 : 0$ non esiste: per 0 non si divide mai.

ESERCIZIO SVOLTO

Calcola $7 \cdot 12$ con la distributiva.

1) $12 = 10 + 2$
2) $7 \cdot (10 + 2) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 2$
3) $70 + 14 = 84$

$$7 \cdot 12 = 84$$

è il calcolo a mente: prima le decine, poi le unità.

DA RICORDARE

1. $N = \{0; 1; 2; 3; ...\}$: ogni naturale ha un successivo.
2. addizione e moltiplicazione: commutative, associative; $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
3. sottrazione e divisione: inverse, non commutative.
4. per 0 non si divide mai; $0 : a = 0$ se $a \neq 0$.

Le potenze e le loro proprietà

Matematica - prima - aritmetica

"Pensavo che 2^3 fosse $2 \cdot 3$. Poi ho letto le barre: 1, 2, 4, 8, ogni volta il doppio. Il 3 dice quanti 2 moltiplico: $2 \cdot 2 \cdot 2$."

1 CHE COS'È UNA POTENZA

Una moltiplicazione ripetuta: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Il 2 è la base, il 3 l'esponente: quante volte la base compare come fattore.
2^3 non è $2 \cdot 3 = 6$. Esponente 1: la base, $7^1 = 7$. Esponente 0: vale 1 (base diversa da 0): $7^0 = 1$.

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, non $2 \cdot 3$



le potenze di 2 crescono a scatti: ogni barra è il doppio della precedente, l'esponente conta i raddoppi da 1.

2 STESSA BASE

Prodotto: tieni la base, somma gli esponenti: $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$. Quoziente, con base diversa da 0 e primo esponente non minore del secondo: sottrai il secondo dal primo: $2^5 : 2^2 = 2^3 = 8$.
Potenza di potenza: moltiplica gli esponenti: $(2^2)^3 = 2^6 = 64$.

$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$; $2^5 : 2^2 = 2^3$; $(2^2)^3 = 2^6$

3 STESSO ESPONENTE

Prodotto: moltiplica le basi, tieni l'esponente: $2^3 \cdot 5^3 = 10^3 = 1000$. Quoziente, con divisore diverso da 0 e divisione esatta: dividi le basi: $6^2 : 3^2 = 2^2 = 4$.
Basi diverse ed esponenti diversi: nessuna proprietà pronta, si calcola: $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$; $6^2 : 3^2 = 2^2$

ESERCIZIO SVOLTO

Semplifica $3^4 \cdot 3^2 : 3^5$.
1) $3^4 \cdot 3^2 = 3^6$
2) $3^6 : 3^5 = 3^1 = 3$
3) controllo: $81 \cdot 9 : 243 = 729 : 243 = 3$

$$3^4 \cdot 3^2 : 3^5 = 3$$

usa le proprietà prima di calcolare: i numeri restano piccoli.

OCCHIO!

Le proprietà valgono per prodotti e quozienti. $2^3 + 2^2$ non è 2^5: è $8 + 4 = 12$.

Esponente 0, base diversa da 0: il risultato è 1, non 0. $5^0 = 1$.

DA RICORDARE

① $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$: la base si ripete come fattore quante volte dice l'esponente.
② stessa base, diversa da 0: nel prodotto somma gli esponenti, nel quoziente sottrai il secondo dal primo (il primo non minore); potenza di potenza: moltiplica gli esponenti.
③ stesso esponente: moltiplica o dividi le basi (divisore diverso da 0, divisione esatta), tieni l'esponente.
④ $a^1 = a$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; somme e differenze: nessuna proprietà.

Le proprietà delle potenze

Matematica - prima - la pagina da tenere aperta

"Le proprietà le sapevo a memoria e le sbagliavo lo stesso. Le domande giuste sono due, «prodotto, quoziente o potenza di potenza?» e «stessa base o stesso esponente?»: le risposte decidono la mossa."

E se le basi sono uguali e devo moltiplicare?

FAI

Tieni la base e **SOMMA** gli esponenti.

OCCHIO

La base non si tocca: $5^2 \cdot 5^3$ non è 25^5.

ESEMPIO

$5^2 \cdot 5^3$

(esponenti: $2 + 3 = 5$)

$= 5^5$

E se le basi sono uguali e devo dividere?

FAI

Tieni la base (diversa da 0) e **SOTTRAI** gli esponenti: il primo meno il secondo.

OCCHIO

Solo se il primo esponente non è minore del secondo: $7^4 : 7^6$ non è un naturale, e non è 7^2: gli esponenti non si scambiano.

ESEMPIO

$7^6 : 7^4$

(esponenti: $6 - 4 = 2$)

$= 7^2 = 49$

E se c'è una potenza di potenza?

FAI

Tieni la base e **MOLTIPLICA** gli esponenti.

OCCHIO

$(3^2)^4$ non è 3^6: gli esponenti si moltiplicano, non si sommano.

ESEMPIO

$(3^2)^4$

(esponenti: $2 \cdot 4 = 8$)

$= 3^8$

E se le basi sono diverse ma l'esponente è lo stesso, e devo moltiplicare o dividere?

FAI

Moltiplica (o dividi, con divisore diverso da 0 e divisione esatta) le basi e **TIENI** l'esponente.

OCCHIO

Se cambiano sia la base sia l'esponente non c'è una proprietà pronta: si calcola, oppure, se una base è potenza dell'altra, la si riscrive: $8^2 \cdot 2^3 = (2^3)^2 \cdot 2^3 = 2^6 \cdot 2^3 = 2^9$.

ESEMPIO

$4^3 \cdot 25^3$

(basi: $4 \cdot 25 = 100$)

$= 100^3 = 1\,000\,000$

DA RICORDARE

① stessa base, diversa da 0: nel prodotto somma gli esponenti, nel quoziente sottrai (il primo non minore del secondo); ② potenza di potenza: moltiplica gli esponenti; ③ stesso esponente: nel prodotto moltiplica le basi, nel quoziente dividile (divisore diverso da 0, divisione esatta); ④ somma o differenza: nessuna proprietà, calcola.

OCCHIO!

Le proprietà valgono per prodotti e quozienti: con somme e differenze si calcola ogni potenza e poi si fa il conto: $3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18$, non 3^1; $2^3 + 5^3 = 8 + 125 = 133$, non 7^3.

Esponente 0 con base diversa da 0: il risultato è 1. Esponente 1: la base, e un numero senza esponente ha esponente 1, per esempio $5 \cdot 5^3 = 5^4$. Base 1: sempre 1. Base 0 con esponente positivo: 0. 0^0 non ha significato.

Multipli, divisori, MCD e mcm

Matematica - prima - aritmetica

"MCD e mcm li scambiavo. Poi ho messo i divisori di 12 e di 18 in due cerchi: in mezzo stanno i comuni, e il più grande è il MCD."

1 MULTIPLI, DIVISORI, PRIMI

I multipli di 6 sono 0, 6, 12, 18, ..., infiniti. I divisori di 12 lo dividono senza resto, 1, 2, 3, 4, 6, 12, e sono finiti.

Un primo ha due divisori soli, 1 e se stesso: 2, 3, 5, 7, 11, ... Il 2 è l'unico primo pari; l'1 non è primo.

12 : 4 = 3 con resto 0, quindi 4 divide 12

2 LA SCOMPOSIZIONE

Ogni naturale maggiore di 1 è un prodotto di primi, in un modo solo (l'ordine dei fattori non conta): $12 = 2^2 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3^2$.

Dividi per il primo più piccolo finché puoi, poi per il successivo, finché resta 1; il prodotto dei primi usati è la scomposizione, e un primo ripetuto diventa una potenza: 12 : 2 = 6, 6 : 2 = 3, 3 : 3 = 1, quindi $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$.

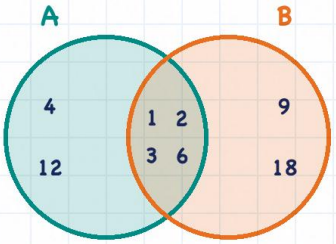
$12 = 2^2 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3^2$

3 MCD E mcm

MCD, il più grande dei divisori comuni: i fattori comuni con l'esponente più piccolo. MCD(12, 18) = $2 \cdot 3 = 6$; senza fattori comuni, MCD = 1.

mcm, il più piccolo multiplo comune (non 0): tutti i fattori con l'esponente più grande. mcm(12, 18) = $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

MCD(12, 18) = 6; mcm(12, 18) = 36



A ∩ B = {1; 2; 3; 6}

A sono i divisori di 12, B quelli di 18: i comuni stanno nella parte in mezzo, A ∩ B («A intersezione B»), e il più grande, 6, è il MCD.

OCCHIO!

Il MCD non supera i numeri, il mcm non è mai più piccolo: se esce il contrario c'è un errore, nelle due scelte (fattori, esponente), nella scomposizione o in un conto.

Due numeri con MCD = 1, come 8 e 15, sono primi fra loro, e il loro mcm è il prodotto: 120.

ESERCIZIO SVOLTO

Calcola MCD e mcm di 20 e 30.

1) $20 = 2^2 \cdot 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
2) MCD: $2 \cdot 5 = 10$
3) mcm: $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

MCD = 10, mcm = 60

controllo, con due numeri: MCD · mcm = 10 · 60 = 600 = 20 · 30; 20 : 10 = 2 e 30 : 10 = 3, senza resto e primi fra loro.

DA RICORDARE

1. per un numero diverso da 0: multipli infiniti, divisori finiti. 3 divide 12 vuol dire che 12 è multiplo di 3; il contrario no: 12 non divide 3.
2. primo = due divisori soli; 1 non è primo; 2 è l'unico primo pari.
3. MCD: comuni, esponente più piccolo; mcm: tutti, esponente più grande.
4. per numeri diversi da 0: MCD ≤ i numeri ≤ mcm; MCD = 1: primi fra loro.