INDICE

il libro è diviso in due: prima la matematica, poi la fisica. si può partire da dove serve. quattro segnali tornano in tutte le pagine: OCCHIO! avverte, IN CORSIA porta in reparto, TRUCCO fa ricordare, DA RICORDARE chiude.

PARTE I - MATEMATICA

NUMERI, CALCOLO E ORDINI DI GRANDEZZA ..... pag. 3
frazioni, notazione scientifica, proporzioni, percentuali, potenze, radicali, logaritmi

ALGEBRA ..... pag. 13
polinomi, prodotti notevoli, scomposizione, equazioni, disequazioni, sistemi

LE FUNZIONI ..... pag. 21
che cos'è una funzione, leggere il grafico, esponenziale e logaritmica

GEOMETRIA E GONIOMETRIA ..... pag. 27
triangoli, aree, volumi, seno e coseno, retta e coniche

PROBABILITÀ E STATISTICA ..... pag. 38
media, mediana, moda, grafici, combinatorio, probabilità

IL METODO ..... pag. 42
le trappole del test di matematica

OCCHIO!

PARTE II - FISICA

GRANDEZZE, MISURA E VETTORI ..... pag. 43
il Sistema Internazionale, conversioni, scalari e vettori

LA CINEMATICA ..... pag. 48
velocità, accelerazione, grafici del moto, circolare e armonico

LA DINAMICA ..... pag. 55
i tre principi, attrito, quantità di moto, momenti e leve

LAVORO ED ENERGIA ..... pag. 67
lavoro, energia cinetica e potenziale, conservazione, potenza

I FLUIDI ..... pag. 72
densità, pressione, Stevino, Pascal, Archimede, Bernoulli

LA TERMODINAMICA ..... pag. 79
temperatura, calore, cambiamenti di stato, gas perfetti, i due principi

ELETTRICITÀ ED ELETTROMAGNETISMO ..... pag. 86
Coulomb, campo, Ohm, circuiti, effetto Joule, magnetismo

IN CORSIA

RIPASSO LAMPO ..... pag. 98
le formule di matematica e di fisica, in tre pagine

LA MAPPA FINALE ..... pag. 101
tutto il libro in un colpo d'occhio

IL BONUS ..... pag. 102
il codice da inquadrare

GLI INSIEMI NUMERICI – N, Z, Q, R

Matematica – numeri, calcolo e ordini di grandezza

"Alla prima pagina di matematica ho scoperto che non sapevo nemmeno che cos'è un numero razionale. Non è una vergogna: è il punto da cui si parte, e si parte da qui."

1. I QUATTRO INSIEMI – N, Z, Q, R

- **N** sono i **NATURALI**: 0, 1, 2, 3 e così via, quelli che servono per contare.
- **Z** sono gli **INTERI**: i naturali più quelli col meno davanti, cioè −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3.
- **Q** sono i **RAZIONALI**: tutti quelli che si possono scrivere come frazione fra due interi, per esempio 3/4 e −7/2.
- **R** sono i **REALI**: i razionali più tutti i numeri che nessuna frazione riesce a scrivere, come $\sqrt{2}$ e π.

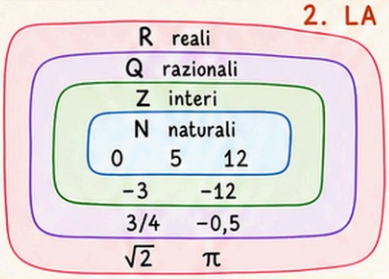
OCCHIO!

il quesito tipo dà quattro numeri e chiede quale NON è razionale: cerca la radice che non viene esatta.

0 è un numero naturale, e non è né positivo né negativo: al test lo chiedono spesso.

una frazione fra due interi è sempre razionale, anche se il risultato ha tanti decimali

2. LA MATRIOSKA – CHI STA DENTRO CHI



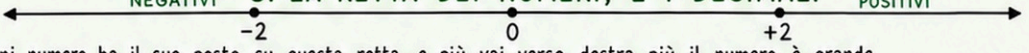
→ ogni insieme sta tutto dentro il successivo: chi è naturale è anche intero, razionale e reale.

→ il contrario non vale: −3 è intero ma non naturale, 3/4 è razionale ma non intero.

→ $\sqrt{2}$ e π stanno solo nella fascia più esterna: sono reali, e nessuna frazione li scrive.

→ il quesito tipo chiede a quale insieme appartiene un numero: si risponde col più piccolo che lo contiene.

3. LA RETTA DEI NUMERI, E I DECIMALI



ogni numero ha il suo posto su questa retta, e più vai verso destra più il numero è grande.
fra i negativi si ribalta tutto: −5 è più piccolo di −2, anche se 5 è più grande di 2.

COME SI PRESENTA	UN ESEMPIO	CHE NUMERO È
il decimale finisce	0,75 = 3/4	razionale
il decimale si ripete sempre uguale	0,333... = 1/3	razionale
il decimale non finisce e non si ripete	$\sqrt{2}$ = 1,4142...	irrazionale

solo la terza riga esce da Q: se un decimale finisce o si ripete, la frazione che lo scrive esiste sempre.

4. IL VALORE ASSOLUTO – LA DISTANZA DALLO ZERO

$$|-5| = 5$$

il valore assoluto è quanto sei lontano dallo zero, e una distanza non è mai negativa.

per lo stesso motivo |+5| = 5: cambia il verso, non la distanza.

le due sbarrette dritte non moltiplicano e non dividono: tolgono il segno, e basta.

5. CONFRONTARE – DUE CONTI SVOLTI

chi è più grande fra 3/4 e 5/7 ?

moltiplico in croce: 3 · 7 = 21 da una parte, 5 · 4 = 20 dall'altra.
vince la frazione dalla parte del prodotto più grande.

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$$

chi è più grande fra 0,7 e 0,68 ?

aggiungo uno zero al primo e lo scrivo 0,70: adesso hanno lo stesso numero di cifre.
70 è più di 68, e il confronto è già finito.

$$0{,}7 > 0{,}68$$

6. IN CORSIA – I NUMERI CHE LEGGI OGNI GIORNO

quello che si conta sta nei naturali: cinque letti, due fiale, e non c'è nessuna virgola.
quello che si misura sta nei decimali: 36,8 °C non è 36 e non è 37.
una variazione porta il segno davanti: +0,4 °C vuol dire salita, −0,4 °C vuol dire discesa.



TRUCCO
il segno dice il verso, il valore assoluto dice di quanto: sono due informazioni diverse.

7. DA RICORDARE

1. N dentro Z, Z dentro Q, Q dentro R: ogni insieme sta tutto dentro il successivo.
2. razionale vuol dire che si scrive come frazione: il decimale finito e quello periodico lo sono.
3. irrazionale = un decimale che non finisce e non si ripete, come $\sqrt{2}$ e come π.
4. il valore assoluto è la distanza dallo zero, e non è mai negativo.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) fra due negativi è più grande quello più vicino allo zero: −2 è maggiore di −5.
2) $\sqrt{4}$ fa 2 ed è un numero naturale: non tutte le radici sono irrazionali.

SENZA CALCOLATRICE - SEI CONTI SVOLTI

Matematica - numeri e calcolo: esempi svolti

"Al test la calcolatrice non c'è, e la prima volta che l'ho saputo mi sono spaventata. Poi ho capito che i conti vengono tondi, se li fai nell'ordine giusto."

1 L'ORDINE DELLE OPERAZIONI - LA SCALA



- al test i conti sono fatti apposta per **venire tondi**: se ti esce un numero storto, hai sbagliato l'ordine.
- si parte sempre da quello che sta dentro le **parentesi**, e si scende un gradino alla volta.
- per e diviso stanno sullo stesso gradino: si fanno da **sinistra a destra**, come li trovi scritti.
- più e meno sono l'**ultimo** gradino, e si fanno **per ultimi** anche se sono i primi che leggi.



niente calcolatrice

2 ESERCIZIO 1 - L'ORDINE

quanto fa $12 + 3 \cdot 4 - 6 : 2$?

- primo sguardo: non ci sono parentesi e non ci sono potenze, quindi salto i primi due gradini.
- faccio le moltiplicazioni e le divisioni: $3 \cdot 4 = 12$ e $6 : 2 = 3$.
- resta $12 + 12 - 3$, e questa la faccio da sinistra a destra.

$= 21$

OCCHIO!

- il quesito tipo mette apposta una **somma** davanti a una **moltiplicazione**: chi legge da sinistra a destra sbaglia.
- una frazione si semplifica solo per quello che moltiplica, **mai** per un pezzo di una somma.

se il risultato viene un numero storto, ricontrolla l'ordine prima di rifare tutto il conto

3 ESERCIZIO 2 - PARENTESI E POTENZE

quanto fa $(5 - 2)^2 \cdot 2 - 4^2 : 8$?

- parentesi per prime: $5 - 2 = 3$, e il conto diventa $3^2 \cdot 2 - 4^2 : 8$.
- poi le **potenze**: $3^2 = 9$ e $4^2 = 16$.
- poi per e diviso: $9 \cdot 2 = 18$ e $16 : 8 = 2$, e resta $18 - 2$.

$= 16$

4 ESERCIZIO 3 - LA SCORCIATOIA

quanto fa $98 \cdot 7$ a mente?

- 98 è 100 meno 2, e riscrivo il conto come $(100 - 2) \cdot 7$.
- moltiplico per 7 tutti e due i pezzi: $700 - 14$.
- questa è la **proprietà distributiva**, e serve proprio a spezzare un numero scomodo.

$= 686$

5 ESERCIZIO 4 - SOMMA DI FRAZIONI

quanto fa $3/4 + 2/5$?

- per sommare due frazioni serve lo stesso denominatore: prendo il **minimo comune multiplo** di 4 e di 5, cioè 20.
- $20 : 4 = 5$ e $3 \cdot 5 = 15$. poi $20 : 5 = 4$ e $2 \cdot 4 = 8$.
- adesso sommo solo i **numeratori**: $15 + 8 = 23$.

$= \frac{23}{20}$

⚠ i **denominatori** non si sommano mai.

6 ESERCIZIO 5 - SEMPLIFICARE PRIMA

quanto fa $6/25 \cdot 15/8$?

- nel prodotto si moltiplica sopra con sopra e sotto con sotto, ma prima conviene **semplificare** in croce.
- 6 e 8 si dividono per 2 e diventano 3 e 4. poi 15 e 25 si dividono per 5 e diventano 3 e 5.
- resta $3/5 \cdot 3/4$, cioè 9 sopra e 20 sotto.

$= \frac{9}{20}$

7 ESERCIZIO 6 - DIVIDERE UNA FRAZIONE

quanto fa $3/4 : 9/8$?

- dividere per una frazione vuol dire moltiplicare per quella girata: 9/8 girata diventa 8/9.
- il conto diventa $3/4 \cdot 8/9$.
- **semplifico**: 3 e 9 si dividono per 3, 4 e 8 si dividono per 4, e resta 2 sopra e 3 sotto.

$= \frac{2}{3}$

TRUCCO

prima di moltiplicare guarda sempre se c'è qualcosa da **semplificare**: risparmi metà del conto.

8 DA RICORDARE

1. l'ordine è sempre lo stesso: parentesi, potenze, per e diviso, più e meno.
2. per e diviso stanno sullo stesso gradino e si fanno da **sinistra a destra**.
3. le frazioni si sommano solo con lo stesso **denominatore**, ma si moltiplicano sempre.
4. dividere per una frazione vuol dire moltiplicare per la frazione girata.

⚠ I TRABOCCHETTI

1) $12 + 3 \cdot 4$ non fa 60: la **moltiplicazione** si fa prima della somma, sempre.
2) $1/2 + 1/2$ fa 1 e non 2/4: il **denominatore** non si somma.

NOTAZIONE SCIENTIFICA E ORDINE DI GRANDEZZA

Matematica - numeri, calcolo e ordini di grandezza

"Mi bloccavo davanti a 0,00000042 e perdevo un minuto a contare gli zeri. Poi ho imparato a spostare la virgola e a contare i posti: dieci secondi, e il numero è pronto."

1 CHE COS'È - $a \cdot 10^n$

$$a \cdot 10^n$$

a = un numero da 1 a 10, con una cifra sola prima della virgola

10 = la base, ed è sempre dieci

n = quante volte moltiplichi per dieci, e può anche essere negativo

la regola è una sola: davanti ci va una cifra sola.

$12 \cdot 10^3$ è un conto giusto ma non è notazione scientifica.

OCCHIO!

il quesito tipo chiede l'ordine di grandezza e non il valore: se ti metti a fare il conto esatto, perdi tempo.

gli zeri e i posti non sono la stessa cosa: si contano i posti che la virgola salta.

le conversioni fra multipli e sottomultipli sono a pagina 43, nel blocco di fisica

2 SPOSTARE LA VIRGOLA - DUE CONVERSIONI

3 200 000 — 6 posti ← $3{,}2 \cdot 10^6$

0,00045 — 4 posti → $4{,}5 \cdot 10^{-4}$

- conta i posti che la virgola salta, non gli zeri: è la stessa cosa solo quando gli zeri sono tutti di fila.
- virgola verso sinistra, esponente positivo. virgola verso destra, esponente negativo.
- il numero non cambia di valore: cambia solo il modo di scriverlo, e diventa più corto da leggere.

3 LE TRE OPERAZIONI

prodotto: i numeri davanti si moltiplicano, gli esponenti si sommano.
$(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^3) = 6 \cdot 10^8$

quoziente: i numeri davanti si dividono, gli esponenti si sottraggono.
$(8 \cdot 10^7) : (2 \cdot 10^3) = 4 \cdot 10^4$

somma: prima si porta tutto allo stesso esponente, e solo dopo si somma.
$3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^5 + 0{,}2 \cdot 10^5 = 3{,}2 \cdot 10^5$

4 L'ORDINE DI GRANDEZZA

l'ordine di grandezza è la potenza di dieci più vicina al numero: dice quanto è grande, non quanto vale.
si guarda solo la cifra davanti: se è minore di 5 resta 10^n, se è 5 o più si sale a 10^{n+1}.
$3{,}2 \cdot 10^6$ ha ordine di grandezza 10^6, mentre $7 \cdot 10^6$ ha ordine di grandezza 10^7.
serve a capire se una risposta è plausibile: fra 10^3 e 10^6 c'è un abisso, e si vede a colpo d'occhio.

5 ARROTONDARE

arrotondare vuol dire tenere poche cifre e buttare le altre senza cambiare troppo il numero.
si guarda la prima cifra che butti: se è 5 o più, quella che resta sale di uno; se è meno di 5, resta com'è.
3,47 tenuto a una cifra dopo la virgola diventa 3,5, mentre 2,341 diventa 2,3.
al test si arrotonda quasi sempre: le risposte sono lontane fra loro e il conto esatto non serve.

6 QUANTO È GRANDE - LA SCALA DEL VIVENTE

CHE COSA	QUANTO MISURA	ORDINE DI GRANDEZZA
un capello, di spessore	circa 0,07 mm	10^{-4} m
una cellula del corpo	circa 0,02 mm	10^{-5} m
un batterio	circa 0,002 mm	10^{-6} m
un virus	circa 0,0001 mm	10^{-7} m

da una riga alla successiva si scende di dieci volte: dal capello al virus ci sono tre gradini, cioè mille volte.



10^{-5} m

7 I PREFISSI SONO POTENZE DI DIECI

PREFISSO	QUANTO VALE
k, chilo	10^3
c, centi	10^{-2}
m, milli	10^{-3}
μ, micro	10^{-6}
n, nano	10^{-9}

un prefisso non è altro che una potenza di dieci scritta con una lettera davanti all'unità.

8 DA RICORDARE

1. notazione scientifica = $a \cdot 10^n$, con una cifra sola prima della virgola.
2. virgola verso sinistra esponente positivo, virgola verso destra esponente negativo.
3. nel prodotto gli esponenti si sommano, nel quoziente si sottraggono.
4. ordine di grandezza = la potenza di dieci più vicina: sotto 5 resta, da 5 in su sale.

I TRABOCCHETTI

1) 10^{-3} non è un numero negativo: è un numero piccolo e positivo, cioè 0,001.
2) nella somma gli esponenti non si toccano: prima si pareggiano, poi si somma.

LE PROPORZIONI - IMPOSTARLE E RISOLVERLE

Matematica - numeri, calcolo e ordini di grandezza

"La proporzione è la cosa che al test torna più spesso, e per anni l'ho impostata a caso. Il segreto è tenere in fila le stesse cose: i grammi coi grammi, i millilitri coi millilitri."

1 CHE COS'È - a : b = c : d

$$a : b = c : d$$

a = il primo termine, ed è un estremo
b = il secondo termine, ed è un medio
c = il terzo termine, ed è l'altro medio
d = il quarto termine, ed è l'altro estremo

si legge a sta a b come c sta a d: sono due rapporti che valgono la stessa cosa.

OCCHIO!

- il quesito tipo racconta una situazione e non scrive la proporzione: la prima mossa è metterla in fila.
- se le grandezze sono inverse, la proporzione diretta dà il risultato rovesciato.

prima di calcolare, chiediti se il risultato che aspetti è più grande o più piccolo del dato

2 LA PROPRIETÀ FONDAMENTALE - a · d = b · c

$$a \cdot d = b \cdot c$$

il prodotto dei due estremi è uguale al prodotto dei due medi: la regola è tutta qui.

gli estremi sono il primo e il quarto termine, i medi sono il secondo e il terzo.

3 TROVARE IL TERMINE CHE MANCA

3 : 12 = 5 : x

x è un estremo: moltiplico i due medi, 12 · 5 = 60. poi divido per l'altro estremo, 60 : 3.

x = 20

8 : x = 20 : 15

x è un medio: moltiplico i due estremi, 8 · 15 = 120. poi divido per l'altro medio, 120 : 20.

x = 6

4 DIRETTA O INVERSA - I DUE GRAFICI





diretta: se una raddoppia, raddoppia anche l'altra. se una si dimezza, l'altra si dimezza.
inversa: se una raddoppia, l'altra si dimezza. quello che resta fermo è il prodotto.

5 QUATTRO ESEMPI, DUE PER TIPO

- diretta: più strada fai in macchina, più benzina consumi. il doppio dei chilometri, il doppio della benzina.
- diretta: più compresse prendi dalla stessa scatola, più principio attivo hai in mano.
- inversa: più persone spingono la stessa barella, meno fatica fa ognuna.
- inversa: lo stesso flacone diviso in più dosi, e ogni dose viene più piccola.

6 QUANDO LA PROPORZIONE NON SI APPLICA

il controllo è uno solo: se una grandezza vale zero, anche l'altra deve valere zero.

- il lato e l'area di un quadrato non sono proporzionali: raddoppi il lato e l'area diventa quattro volte.
- l'età e l'altezza di un bambino non lo sono: a dieci anni non è alto il doppio che a cinque.

7 IN CORSIA - DOSAGGI E DILUIZIONI

in un flacone 500 mg stanno in 2 mL. quanti millilitri servono per 750 mg?

scrivo la proporzione tenendo in fila le stesse cose, i milligrammi coi milligrammi: 500 : 2 = 750 : x.
x è un estremo: moltiplico i due medi, 2 · 750 = 1500.
poi divido per l'altro estremo, 1500 : 500.

x = 3 mL



500 mg in 2 mL

TRUCCO
se nella stessa riga mescoli milligrammi e millilitri, il conto salta e non te ne accorgi.

8 DA RICORDARE

1. proporzione = due rapporti uguali: a sta a b come c sta a d.
2. prodotto degli estremi = prodotto dei medi: da qui esce sempre il termine che manca.
3. diretta: il rapporto resta costante, e il grafico è una retta che parte dall'origine.
4. inversa: il prodotto resta costante, e il grafico è una curva che non tocca mai gli assi.

I TRABOCCHETTI

1) non tutto quello che cresce insieme è proporzionale: il controllo è lo zero.
2) sopra e sotto devono stare le stesse unità, o il risultato non vuol dire niente.

LE PERCENTUALI – 15% VUOL DIRE 15 OGNI 100

Matematica – numeri e calcolo: le percentuali

"Alla simulazione ho perso due domande per lo stesso motivo: avevo sommato un aumento e uno sconto. Non si sommano mai, si moltiplicano."

1 CHE COS'È UNA PERCENTUALE – 15% = $\frac{15}{100}$ = 0,15

per cento vuol dire ogni cento: il 15% è una frazione che ha sempre 100 sotto.

la stessa quantità si scrive in tre modi: 15%, la frazione $\frac{15}{100}$ e il numero 0,15.

da percentuale a numero dividi per 100, da numero a percentuale moltiplichi per 100: la virgola si sposta di due posti.

OCCHIO!

- il quesito tipo dà due variazioni di seguito e mette fra le risposte la loro somma: è la risposta sbagliata.
- 10 punti percentuali e il 10% in più sono due cose diverse: leggi quale delle due ti sta chiedendo.

il totale è sempre il 100%: se non lo trovi, è il numero a cui la percentuale si riferisce

2 IL CALCOLO DIRETTO – IL PEZZO CHE CERCHI

parte = totale · p / 100

parte = il pezzo che stai cercando
totale = il numero intero di partenza, quello che vale il 100%
p = il numero scritto davanti al segno di percentuale

il 15% di 80: faccio 80 · 15 : 100 e ottengo 12.

a mente è ancora più corto: il 10% di 80 è 8, il 5% è la sua metà cioè 4, e insieme fanno 12.

3 I DUE CONTI ALL'INDIETRO

che percentuale è 12 su 80? divido la parte per il totale: 12 : 80 = 0,15, cioè il 15%.

12 è il 15% di quanto? divido la parte per 0,15 e ritrovo il totale: 12 : 0,15 = 80.

se cerchi il pezzo moltiplichi, se cerchi la percentuale o il totale dividi.

il controllo è sempre lo stesso: la parte deve venire più piccola del totale.

4 IL COEFFICIENTE MOLTIPLICATIVO – UN NUMERO SOLO

CHE COSA SUCCEDE	IL CONTO	ESEMPIO SU 200
aumento del 20%	si moltiplica per 1,20	200 diventa 240
sconto del 20%	si moltiplica per 0,80	200 diventa 160
aumento del 5%	si moltiplica per 1,05	200 diventa 210
sconto del 5%	si moltiplica per 0,95	200 diventa 190

per un aumento moltiplichi per $1 + \frac{p}{100}$, per uno sconto per $1 - \frac{p}{100}$: un numero solo e hai finito.

5 GLI AUMENTI SUCCESSIVI NON SI SOMMANO

100 —(si moltiplica per 1,20)→ 120 —(si moltiplica per 0,80)→ 96

un aumento del 20% e poi uno sconto del 20% non si annullano: parti da 100 e torni a 96.

ogni variazione si applica al numero nuovo, mai a quello di partenza.

in un colpo solo: 1,20 · 0,80 = 0,96, cioè uno sconto del 4%.

6 PUNTI PERCENTUALI ≠ VARIAZIONE PERCENTUALE

PUNTI PERCENTUALI	VARIAZIONE PERCENTUALE
è la sottrazione fra due percentuali. da 40% a 50% sono 10 punti percentuali in più.	guarda di quanto è cresciuto il valore di partenza. 10 su 40 fa 0,25, cioè il 25% in più.

stessa coppia di numeri, due risposte diverse: il quesito sceglie apposta quella che non ti aspetti.

7 IN CORSIA – LA PERCENTUALE SULL'ETICHETTA

sulle soluzioni la percentuale è in grammi ogni 100 mL: la glucosata al 5% ha 5 g di glucosio in 100 mL.

in un flacone da 500 mL ce n'è cinque volte tanto, cioè 25 g: la percentuale non cambia, il volume sì.

la percentuale da sola non dice quanto ne stai dando: serve sempre anche il volume.



5 g / 100 mL

TRUCCO
il 10% si legge spostando la virgola di un posto: da lì il 5% è la metà e il 20% è il doppio.

8 DA RICORDARE

1. il 15% di un numero: moltiplichi per 0,15. per tornare indietro dividi per 0,15.
2. aumento del p%: moltiplichi per $1 + \frac{p}{100}$. sconto del p%: moltiplichi per $1 - \frac{p}{100}$.
3. due variazioni di seguito si moltiplicano fra loro: 1,20 · 0,80 = 0,96, cioè meno 4%.
4. punti percentuali = una sottrazione. variazione percentuale = quanto è cresciuto il valore di partenza.

I TRABOCCHETTI

1) più 20% e poi meno 20% non riportano al punto di partenza: si finisce sempre più in basso.
2) crescere del 100% vuol dire raddoppiare, e crescere del 200% vuol dire diventare tre volte tanto.